ZEITSCHRIFT
FÜR PHYSIK UND MATHEMATIK.

PHYSIKALISCHE ABTHEILUNG.

I. Untersuchungen über Magnetisirung des Eisens durch das Licht, nebst neuen Versuchen über denselben Gegenstand von A. Baumgartner.

1.

Bekanntlich hat schon vor ziemlich langer Zeit Morichini, ein gelehrter Physiker in Rom, bekannt gemacht, dass es ihm gelungen sey, Eisen dadurch zu magnetisiren, dass er es dem violetten Theil des prismatischen Farbenbildes aussetzte. Dr. Carpi in Rom und Marquis Ridolfi in Florenz wollen mit Erfolg den Versuch wiederhohlt haben, aber Dhombre Fermas und Professor Configliachi in Pavia bemühten sich vergebens, durch dieses Mittel Magnetismus zu erregen; selbst der anerkannte vortreffliche Experimentator Bérard bemerkte nur zufällig geringe Spuren von Magnetismus am Eisen, das er in die von Morichini angegebenen Umstände versetzte. Somit war die Richtigkeit seines

Verfahrens von den meisten deutschen, englischen und französischen Physikern stark in Zweifel gezogen, nur der Umstand, dass H. Davy im Jahre 1814 in Italien mit eigenen Augen ein unmagnetisches Stück Eisen im violetten Lichte stark magnetisch werden sah, und dass Playfair im Jahre 1817 selbst einem gelungenen Versuch beiwohnte, konnte Morichini in den Augen der Welt rechtfertigen.

Playfair äusserte sich über das Verfahren beim Versuche, den ihm Dr. Carpi in Rom in Abwesenheit Morichinis zeigte, mündlich gegen Brewster folgender Massen:

Wir erhielten das violette Licht auf die gewöhnliche Weise mittelst eines Prisma's und sammelten es im Brennpuncte einer hinreichend grossen Linse. Die Nadel bestand aus weichem Draht und zeigte, vorläufigen Versuchen gemäss, weder die mindeste magnetisehe Polarität, noch eine Einwirkung auf Eisenfeilspäne. Diese ward horizontal auf einer Unterlage mittelst Wachs befestiget und zwar so, dass sie den magnetischen Meridian unter einem rechten Winkel schnitt. Der Focus der violetten Strahlen wurde langsam längs der Nadel hingeführt, indem man von der Mitte aus gegen ein Ende zuschritt, und Sorge trug, dass nicht eben so zurückgegangen und die andere Hälfte der Nadel nicht vom Lichte berührt wurde. Nachdem die Nadel eine halbe Stunde auf diese Weise behandelt worden war, wurde sie genau untersucht, man fand an ihr weder eine Spur von Polarität, noch eine anziehende Kraft; allein als diese Operation um 25 Minuten länger fortgesetzt, die Nadel hierauf vom Lichte weggenommen, und auf eine

Spitze gestellt wurde, drehte sie sich mit grosser Lebhaftigkeit herum, und stellte sich in den magnetischen Meridian, so dass das Ende, welches im violetten Lichte stand, gegen Norden gewendet war. Sie zog Eisenfeilspäne an und trug sie; das dem Lichte ausgesetzte Ende stiess den Nordpol einer Magnetnadel ab. Keinem der Anwesenden blieb der mindeste Zweifel, dass die Nadel ihren Magnetismus der Einwirkung des Lichtes verdanke.

2.

So stand die Sache, als Mad. Sommerville durch die heiteren Tage im Jahre 1825 angeeifert, den Morichinischen Versuch neuerdings vornahm. Zu diesem Zwecke wurde ein dreiseitiges gleichseitiges Prisma aus Flintglas an die Oeffnung eines Fensterladens gestellt, und eine Nähnadel von etwa 1 Z. Länge, die den Nord- und den Südpol eines Magnetes auf gleiche Weise anzog, den violetten Strahlen des Farbenbildes, in der Entfernung von beiläufig 5 Fuss vom Fenster, ausgesetzt. Die Hälfte davon wurde mit Papier bedeckt, weil zu vermuthen war, dass die Entwickelung des Magnetismus durch das Licht nicht Statt finden könne, wenn die ganze Nadel seinem Einflusse ausgesetzt ist. Nach Verlauf von 2 Stunden fand man sie magnetisch, und zwar war das dem Lichte ausgesetze Ende der Nordpol. Dieser Versuch wurde mehrmals mit demselben glücklichen Erfolge wiederhohlt. Man bediente sich auch zu demselben Zwecke des blauen und grünen Theiles des Farbenbildes und fand eine ähnliche aber dem Grade nach schwächere Wirkung; nur die indigo-

blauen Strahlen zeigten fast dieselbe Kraft wie die violetten; die orangefarbnen, gelben und rothen übten keinen magnetisirenden Einfluss aus.

3.

Die erwärmenden Strahlen des Farbenbildes konnten keine magnetische Kraft im Eisen erwecken, wiewohl der Versuch mit ihnen in drei auf einander folgenden Tagen vorgenommen wurde. Hieraus ergibt sich deutlich, dass die magnetisirende Kraft des Lichtes nicht auf Rechnung der sie begleitenden Wärmestrahlen komme, wiewohl dieses schon daraus klar ist, dass die magnetisirende Kraft gerade in jenen Strahlen am intensivsten wirkt, wo allen Versuchen zu Folge die erwärmende Wirkung am kleinsten ist.

4.

Mad. Sommerville setzte auch Uhrfedern von etwa $1\frac{1}{2}$ Z. Länge und $\frac{1}{8}$ — $\frac{1}{4}$ Z. Breite, die entweder ursprünglich nicht magnetisch waren, oder denen ihre magnetische Kraft durch Wärme genommen war, auf die vorhin genannte Weise den violetten Lichtstrahlen aus, und fand, dass immer das beleuchtete Ende ein Nordpol wurde. Es schien sogar, als bekämen sie den Magnetismus durch dieses Verfahren leichter als Nadeln, wahrscheinlich weil sie dem Lichte eine grössere Oberfläche darboten, und blau angelaufen waren; ein Pfriemen wurde aber nicht magnetisch, weil seine Masse wahrscheinlich zu gross war. Wurden die violetten Lichtstrahlen mittelst einer Linse von grosser Oeffnung, wie sie Wollaston zur Prüfung der chemischen Wirkung des Lichtes an-

wendete, concentrirt, so entwickelten sie viel schneller den Magnetismus, als wenn dieses nicht der Fall war. Man fand auch, dass diese Versuche gerade kein verfinstertes Zimmer fordern, sondern dass es hinreichend sey, das Farbenbild an einen Ort hinzuführen, der nicht von directem Sonnenlichte beschienen ist.

5.

Auch das violette Licht, welches gefärbte Gläser durchlassen, fand M. Sommerville wirksam zur Magnetisirung, wenn nur die Hälfte des zu magnetisirenden Eisens stets wie bei den vorigen Versuchen bedeckt war. Hinter grünen Gläsern erfolgte dasselbe. Man konnte diese Wirkung keineswegs dem Einflusse den chemisch agirenden Strahlen zuschreiben, weil Papier, das mit salzsaurem Silber überstrichen war, und hierauf der Wirkung des Sonnenlichtes ausgesetzt wurde, hinter einem blauen und hinter einem gewöhnlichen Glase in derselben Zeit in gleichem Grade geschwärzt wurde, während doch die magnetische Einwirkung der Lichtstrahlen, die von beiden Gläsern auf das Eisen geleitet wurden, sehr verschieden war.

6.

Mad. Sommerville machte auch Versuche mit Nadeln, die sie zur Hälfte in grüne und blaue Bänder einwickelte, während die andere Hälfte mit Papier bedeckt war. Wurden diese, einen Tag lang, dem Einflusse des Sonnenlichtes hinter einer Fensterscheibe ausgesetzt, so erlangten sie auch magnetische Polarität; aber Nadeln, die in rothe, orangefarbene oder gelbe Seide eingewickelt waren, blieben

unmagnetisch. Die schicklichste Zeit zu solchen Versuchen soll die Mittagsstunde oder 1 Uhr nach Mittag seyn. Wenn die Jahrszeit einmal weit vorgerückt war, fand man die entwickelte magnetische Kraft schwächer und minder lang anhaltend.

7.

So viel ist über die Magnetisirung durch Einfluss des Lichts bis jetzt zur allgemeinen Kenntniss gelangt, und dieses ist gewiss hinreichend, Freunde der Naturwissenschaft zur Wiederhohlung dieser interessanten Versuche einzuladen. Ich konnte diesem Reitze nicht widerstehen, versuchte die oben angegebenen Phänomene auch hervorzubringen, und hielt mich dabei ganz genau an die von Mad. Sommerville angegebene Behandlungsweise. Dünnen Eisendraht fand ich, als er in einem verfinsterten Zimmer nur wenige Minuten dem violetten Theile des Farbenbildes ausgesetzt ward, so stark magnetisch, dass er auf einen Pol einer astatischen Doppelnadel stark abstossend wirkte; jedoch gelang mir dieses nicht an jedem Tage bei demselben Verfahren auf gleiche Weise, woran wahrscheinlich die Lichtstärke, die mir zu Gebothe stand, Schuld ist.

Um auch den Versuch über die Wirkung des von gefärbten Gläsern durchgelassenen Lichts zu machen, schloss ich zwei gewöhnliche Nähnadeln in ein hölzernes schwarz polirtes Kästchen ein, das zwei einander gegenüber stehende Ausschnitte, wie Fenster, hatte, welche mit violetten Gläsern vermacht waren.

Als ich das Sonnenlicht an zwei auf einander fol-

genden Tagen jedesmal 7 Stunden darauf einwirken liess, fand ich beide Nadeln magnetisch. Der von Papier entblösste Theil war der Nordpol. Allein die Kraft, womit er den Nordpol einer anderen sehr empfindlichen Magnetnadel abstiess, war sehr schwach, und verlor sich nach einigen Stunden wieder gänzlich.

8.

Das Interessanteste an den Resultaten aller dieser Versuche ist, dass man daraus ersieht, es komme bei der Magnetisirung des Eisens durch das Licht nicht auf die absolute Beleuchtung, sondern auf die Differenz der Beleuchtung einzelner Theile desselben an. Morichini strich ein Ende einer zu magnetisirenden Nadel mit violetten durch eine Linse verdichtetem Lichte, und nahm sich in Acht, das andere Ende mit Licht zu berühren, M. Sommerville beugt der Beleuchtung der einen Hälfte der eisernen Nadel durch einen papiernen Schirm vor.

Die Anwendung einer Sammellinse erhöht den Unterschied der Beleuchtung der beiden Hälften der Nadel und beschleuniget zugleich die Erregung der magnetischen Kraft in ihr.

9.

Es zeigt sich hierin zwischen diesen Erscheinungen und den von Seebek in ungleich erwärmten Metallen hervorgebrachten eine sehr grosse Uebereinstimmung; denn Seebek lehrte in allen, besonders in den leicht krystallisirbaren Metallen durch ungleiche Erwärmung eben so Magnetismus zu er-

regen, wie dieses Morichini und M. Sommerville im Eisen durch ungleiche Beleuchtung zeigen. Der Magnetismus, welcher durch das Seebek'sche Verfahren rege gemacht wird, ist allerdings nur vorübergehend, und hält nur so lange an, als die Temperaturdifferenz dauert, während der durch Licht im Eisen hervorgerufene wie der durch Streichen erzeugte anhält; allein man weiss ja, dass überhaupt nur Eisen, Nickel und Kobalt dauernden Magnetismus annehmen, und man kennt bis jetzt kein Mittel, in den anderen Metallen diese Kraft zu fixiren, wiewohl man sie auch durch einen electrischen Strom und durch Annäherung eines Magnetes in einen momentanen magnetischen Zustand versetzen kann, über welchen letzteren Punct insbesondere die Ablenkung einer Magnetnadel durch rotirende Metallscheiben, die im zweiten Hefte dieses Bandes enthalten sind, hinreichende Aufklärung geben. Ein anderer Unterschied zwischen der Erregung des Magnetismus im Eisen durch Licht und der in anderen Metallen durch Wärme, scheint nach den vorliegenden Versuchen darin zu bestehen, dass zu ersterem Zwecke gerade nur violettes, blaues oder grünes Licht, mithin ein Strahl von bestimmter Natur nothwendig ist, während man zu letzterem Zwecke die Wärme, sie mag von was immer für einer Quelle herkommen, gleich tauglich findet. Dabei bleibt aber der Umstand sehr merkwürdig, dass die Wirkung des violetten Lichtes in Betreff der Erregung einer magnetischen Thätigkeit mit seinen anderwärtigen Eigenschaften, und ihren Verhältnissen zur magnetischen Kraft im besten Einklange steht. Das violette Licht

ist von den wenigsten Wärmestrahlen begleitet, diese aber schwächen die magnetische Kraft; das violette Licht bewirkt leichter als jedes andere eine Desoxydation, d. i. eine Trennung eines Stoffes vom Oxygen und dieser ist bekanntlich einer der grössten Feinde des Magnetismus.

10.

Da die rothen, orangefarbigen und gelben Strahlen in dem Theile eines Eisenstückes, das sie bescheinen, gar keinen Magnetismus erzeugen, so scheint es, als sey man einigermassen berechtiget anzunehmen, sie können auch den von anderen Strahlen erregten nicht aufheben und vernichten, weil nach der gewöhnlichen Vorstellungsweise ein magnetischer Pol nur durch einen entgegengesetzten neutralisirt werden kann.

Ist dieses richtig, so muss auch directes, unzerlegtes Sonnenlicht, das einen Eisenstab an einem Theile stärker als am anderen trifft, in dem stärker erleuchteten Theile einen Nordpol erzeugen, und zwar schneller, als es violettes Licht zu thun vermag, weil im weissen Lichte die violetten, blauen und grünen Strahlen zugleich wirken.

11.

Um die Richtigkeit dieses Schlusses zu prüfen, verschaffte ich mir kreisrunde Stängelchen englischen Stahles, deren Durchmesser $\frac{1}{3}$ L. betrug. Jedes derselben wurde durch schnelles Abbrechen, in mehrere Stücke, von etwa 3 Z. Länge, getheilt, und untersucht, ob sich in ihnen kein freier Magnetismus be-

regen, wie dieses Morichini und M. Sommerville im Eisen durch ungleiche Beleuchtung zeigen. Der Magnetismus, welcher durch das Seebek'sche Verfahren rege gemacht wird, ist allerdings nur vorübergehend, und hält nur so lange an, als die Temperaturdifferenz dauert, während der durch Licht im Eisen hervorgerufene wie der durch Streichen erzeugte anhält; allein man weiss ja, dass überhaupt nur Eisen, Nickel und Kobalt dauernden Magnetismus annehmen, und man kennt bis jetzt kein Mittel, in den anderen Metallen diese Kraft zu fixiren, wiewohl man sie auch durch einen electrischen Strom und durch Annäherung eines Magnetes in einen momentanen magnetischen Zustand versetzen kann, über welchen letzteren Punct insbesondere die Ablenkung einer Magnetnadel durch rotirende Metallscheiben, die im zweiten Hefte dieses Bandes enthalten sind, hinreichende Aufklärung geben. Ein anderer Unterschied zwischen der Erregung des Magnetismus im Eisen durch Licht und der in anderen Metallen durch Wärme, scheint nach den vorliegenden Versuchen darin zu bestehen, dass zu ersterem Zwecke gerade nur violettes, blaues oder grünes Licht, mithin ein Strahl von bestimmter Natur nothwendig ist, während man zu letzterem Zwecke die Wärme, sie mag von was immer für einer Quelle herkommen, gleich tauglich findet. Dabei bleibt aber der Umstand sehr merkwürdig, dass die Wirkung des violetten Lichtes in Betreff der Erregung einer magnetischen Thätigkeit mit seinen anderwärtigen Eigenschaften, und ihren Verhältnissen zur magnetischen Kraft im besten Einklange steht. Das violette Licht

ist von den wenigsten Wärmestrahlen begleitet, diese aber schwächen die magnetische Kraft; das violette Licht bewirkt leichter als jedes andere eine Desoxydation, d. i. eine Trennung eines Stoffes vom Oxygen und dieser ist bekanntlich einer der grössten Feinde des Magnetismus.

10.

Da die rothen, orangefarbigen und gelben Strahlen in dem Theile eines Eisenstückes, das sie bescheinen, gar keinen Magnetismus erzeugen, so scheint es, als sey man einigermassen berechtiget anzunehmen, sie können auch den von anderen Strahlen erregten nicht aufheben und vernichten, weil nach der gewöhnlichen Vorstellungsweise ein magnetischer Pol nur durch einen entgegengesetzten neutralisirt werden kann.

Ist dieses richtig, so muss auch directes, unzerlegtes Sonnenlicht, das einen Eisenstab an einem Theile stärker als am anderen trifft, in dem stärker erleuchteten Theile einen Nordpol erzeugen, und zwar schneller, als es violettes Licht zu thun vermag, weil im weissen Lichte die violetten, blauen und grünen Strahlen zugleich wirken.

11.

Um die Richtigkeit dieses Schlusses zu prüfen, verschaffte ich mir kreisrunde Stängelchen englischen Stahles, deren Durchmesser $\frac{1}{3}$ L. betrug. Jedes derselben wurde durch schnelles Abbrechen, in mehrere Stücke, von etwa 3 Z. Länge, getheilt, und untersucht, ob sich in ihnen kein freier Magnetismus be-

finde Traf man auch nur die geringste Spur davon an, so wurde es völlig ausgeglüht, und nach dem Erkalten wieder untersucht. Selten traf es sich auch dann noch, dass man irgend eine magnetische Polarität bemerken konnte. Die Untersuchung wurde mittelst einer ungemein empfindlichen Magnetnadel vorgenommen, die aus zwei Stücken feinen Uhrfederstahles bestand, wovon jedes mit zwei magnetischen Polen versehen war. Beide Stücke waren mittelst einer Art Gabel aus Messing in eine solche Richtung gebracht, dass sie dem Anscheine nach eine einzige Magnetnadel vorstellten, die aber an den beiden Enden gleichnamige Pole hatte, und daher fast astatisch war. An dem Messingstücke war ein Hütchen aus Glas angebracht. Bei der Untersuchung auf Magnetismus wurde nicht bloss darauf geachtet, ob ein bestimmter Pol der Magnetnadel von einem Ende des zu prüfenden Stahlstängelchens angezogen, vom anderen abgestossen wurde, sondern auch, ob die Anziehung an einem Ende stärker als am anderen sey. In jedem Falle, wo es sich darum handelte, zu erkennen, ob ein Stahlstück schon vor dem damit vorzunehmenden Versuche ganz unmagnetisch sey, wurde letzteres nur dann angenommen, wenn das Stück völlig gleich auf beide Pole wirke; wo aber die Erzeugung des Magnetismus durch einen Versuch beabsichtiget war, da wurde eine Nadel nicht für magnetisch gehalten, wenn sie nicht auf einen Pol der astatischen Doppelnadel abstossend wirkte, sondern der Versuch zu denjenigen gezählt, deren Resultat zweideutig ist.

12.

Es wurden nun sechs Stahlnadeln, die völlig unmagnetisch befunden wurden, an einem Ende polirt, am anderen behielten sie die Farbe und Oberfläche bei, mit der sie verkauft werden, und ich war Willens, sie am polirten Ende anlaufen zu lassen, damit dadurch selbst in dem Falle, wo sie dem directen, unzerlegten Sonnenlichte ausgesetzt waren, eine Ungleichheit in der Beleuchtung beider Hälften Statt finden möchte. Sie blieben aber, bevor der eigentliche Versuch vorgenommen werden konnte, einige Stunden abgesondert von einander liegen. Als ich sie wollte anlaufen lassen, untersuchte ich sie noch vorläufig auf Magnetismus, und sah, dass jedes polirte Ende ein Nordpol, jedes unpolirte ein Südpol sey. Wiewohl ich zuerst die Meinung fasste, dass dieser Magnetismus durch die mit dem Poliren verbundene Erschütterung hervorgebracht worden sey, so musste mir doch der Umstand einigermassen interessant seyn, dass ohne Ausnahme gerade das glänzendere Stück der Nordpol sey. Noch mehr wurde meine Aufmerksamkeit rege gemacht, als von neun anderen auf gleiche Weise zubereiteten Stücken jedes am polirten Ende einen Nordpol, am anderen einen Südpol hatte. Dass keine Mittheilung des Magnetismus durch einen, etwa beim Poliren gebrauchten Körper Statt gefunden habe, liess das Verfahren, welches dabei angewendet wurde, mit ziemlicher Zuverlässigkeit voraussetzen. Es wurde nämlich das Stahlstück in einem Kloben mit messingenen Backen befestiget, auf eine hölzerne Unterlage ge-

legt, mit einem sogenannten Oehlstein geschliffen, und dann mittelst Kalk und einem Stücke Holz (meistens aber doch nicht immer Lindenholz), fein polirt. Der einzige etwas bedenkliche Umstand war der, dass die hölzerne Unterlage in einem Schraubstock befestiget war, der auf dem magnetischen Meridian nicht senkrecht stand, sondern einen Winkel von etwa 45° damit machte.

13.

Um mich zu überzeugen, in wie weit die beim Poliren Statt habende Erschütterung auf die Erregung des Magnetismus Einfluss habe, wurde eine Nadel, als sie nur unvollkommen polirt war, auf Magnetismus untersucht, und völlig unmagnetisch befunden, dann das Poliren bis zur Erlangung eines hinreichenden Glanzes fortgesetzt, und wieder mit einer Magnetnadel geprüft. Auch da konnte keine Spur von Magnetismus wahrgenommen werden. Als aber das so zubereitete Stück an einen Platz gelegt wurde, der vom directen Sonnenlichte beschienen war, und ich zugleich mittelst einer Loupe von 1 Zoll Oeffnung verdichtete Lichtstrahlen auf den polirten Theil leitete, und sie so etwa 3 Minuten einwirken liess, fand ich diesen Theil mit einem starken Nordpol, den andern mit einem starken Südpol versehen. Ich glaubte nun annehmen zu können, dass der Magnetismus durch ungleiche Beleuchtung der zwei Hälften der Stahlnadel erzeugt worden sey.

14.

Wenn der aus dieser Erfahrung gezogene Schluss

richtig ist, so muss sich noch leichter im Lichte magnetische Kraft erregen lassen, wenn man ein Stahlstück gut ausglüht, wodurch es mit einer schwarzen Oxydhaut überzogen wird, und erst dann an einem Ende polirt; denn da ist der Unterschied der Erleuchtung in beiden Theilen noch grösser, als wenn man neben dem polirten Theil einen anderen übrig lässt, der die natürliche Stahlfarbe hat; auch muss man an einem Stahlstück mehrere magnetische Pole erzeugen können, wenn man es an mehreren Stellen polirt, so dass die glänzenden Stellen durch unpolirte dunkle getrennt sind. Wie sehr diese Meinung durch die Erfahrung bestätiget wird, zeigen die folgenden Versuche:

a) Neun Stahlstücke, deren jedes an einem Ende polirt war, während es am anderen die beim Ausglühen erhaltene schwarze Oxydhaut beibehielt, erlangten nach dem Poliren an einem von der Sonne beschienenen Platze in Kurzem eine so starke magnetische Polarität, dass sie nicht bloss eine empfindliche Magnetnadel in der Entfernung eines Zolles stark afficiren, sondern auch mehrere (2 bis 5) kleine Stücke weichen Eisendrahtes tragen konnten. Jedes hatte am polirten Ende den Nordpol.

b) Ein Stück wurde stark ausgeglüht, auf Magnetismus untersucht, und als es unmagnetisch befunden war, an einem Ende gehärtet. Dieses Ende wurde bedeutend heller als der übrige Theil, weil beim Ablöschen im Wasser das Oxydhäutchen absprang. Am folgenden Tage zeigte es sich, wiewohl schwach magnetisch, und hatte auch am helleren Ende den Nordpol. Indess wäre es immer möglich, dass hier

die Erregung des Magnetismus durch die schnelle Abkühlung, und nicht so sehr durch den Einfluss des Lichtes erzeugt worden sey.

c) Zwei Stücke wurden ganz polirt, und zeigten weder auf der Stelle, noch als sie 8 Tage dem Sonnenlichte ausgesetzt gewesen waren, die geringste magnetische Kraft.

d) Drei andere Stücke wurden mit dem ganzen schwarzen Ueberzug, den sie beim Ausglühen erhielten, dem Sonnenlichte ausgesetzt, und waren selbst nach einer Woche nicht im mindesten magnetisch.

e) Drei Stücke wurden an der ganzen Oberfläche fein polirt. Als sie sich bei der Untersuchung als ganz unmagnetisch bewährt hatten, wurden sie zur Hälfte mit schwarzem Siegellak bedeckt und dann der Sonne ausgesetzt. Zwei davon waren nach etwa 6 Stunden magnetisch, und hatten am freien Ende ihren Nordpol, jedoch war ihre magnetische Kraft viel schwächer, als die in den vorhergehenden Stücken erzeugte. Am dritten Stücke konnte kein Magnetismus wahrgenommen werden.

f) Ein Stück wurde der ganzen Länge nach mit einem hellen Streifen mittelst des Polirens versehen, und dann wie die übrigen dem Lichte ausgesetzt, bekam aber keine magnetische Kraft.

g) Drei Stücke wurden in der Mitte polirt, behielten im übrigen aber ihre schwarze Oberfläche. Jedes derselben bekam im Sonnenlichte an den beiden Enden einen Südpol, hingegen in der Mitte, wo sich der polirte Theil befand, einen sehr starken Nordpol. Es waren deren wahrscheinlich zwei, lagen

einander aber so nahe, dass man sie nicht einzeln erkennen konnte.

h) Andere drei Stücke wurden an beiden Enden polirt, und behielten in der Mitte ihre dunkle Oberfläche. Auch bei diesen bewährte sich das schon aus den vorhergehenden Versuchen erkennbare Gesetz, und jedes Stück hatte an jedem Ende einen Nordpol, in der Mitte hingegen einen starken Südpol.

i) Ein Stück mit vier polirten Gürteln, welche durch fünf schwarze von einander getrennt waren, zeigte vier Nord- und fünf Südpole, als es etwa zwei Stunden dem Lichte ausgesetzt ward; allein am Tage nach dem Versuche konnte ich mich nur mehr von der Anwesenheit von vier magnetischen Polen überzeugen; die übrigen sind wahrscheinlich desshalb verloren gegangen, weil sie einander gar zu nahe waren. Unter den noch vorhandenen Polen waren die zwei äusseren, die beide Südpole waren, und der Regel gemäss an schwarzen Stellen ihren Sitz hatten, die kräftigsten.

Alle Stahlstücke, von denen bis itzt die Rede war, hatten eine Länge von 2 — 2½ Zoll, und sind aus demselben englischen Stahle verfertiget, aus welchem die bei den ersten Versuchen angegebenen gemacht wurden. Einige von ihnen waren ausserhalb des Zimmers der Einwirkung des Sonnenlichtes ausgesetzt, andere im Zimmer selbst, immer lagen sie aber auf einem horizontalen Tische in einer Richtung, die auf dem magnetischen Meridiane entweder völlig senkrecht war, oder doch einen grossen Winkel mit ihm machte.

k) Ein Stahlstück von derselben Dicke, wie die

vorigen, und von einer Länge von 7 Zoll, bekam durch Poliren neun glänzende Stellen und behielt zehn dunkle, worunter auch die beiden Extremitäten gehörten. Als es einige Zeit dem Lichte ausgesetzt war, bemerkte man an einem Theile, vom Ende gegen die Mitte, fünf magnetische Pole, und zwar drei Südpole, zwischen denen zwei Nordpole befindlich waren. Am anderen Ende konnte nur ein Süd- und ein Nordpol bemerkt werden.

l) Der auffallendste Versuch unter allen, die angestellt wurden, und der am deutlichsten zeigt, dass der hier besprochene Magnetismus durch das Licht hervorgerufen werde, war folgender: Ein $2\frac{1}{2}$ Z. langes Stahlstück wurde Nachts bei Kerzenlicht ausgeglüht, dann in völliger Finsterniss so lange polirt, bis man voraussetzen konnte, es sey schon ein hinreichender Glanz erzeugt worden, hierauf in eine bleierne Kapsel eingeschlossen, die alles Licht davon abhielt, und bis zum folgenden Tag aufbewahrt. An diesem wurde sie nebst der Kapsel auf Magnetismus geprüft, ohne jedoch dem Lichte den mindesten Zutritt zum Stahl zu gestatten, und ganz unmagnetisch befunden. Hierauf wurde die Kapsel geöffnet und die Nadel herausgenommen. Dabei ward sie ein wenig gebogen, und das mag die Ursache seyn, dass das polirte Ende, wiewohl sehr schwache, Spuren eines Südpoles zeigte. Als diese Nadel eine Stunde auf einem von der Sonne beschienenen Tische gelegen war, zeigte sie gar keinen Magnetismus mehr, als man sie aber etwa 3 Minuten an dem polirten Ende mittelst einer Sammellinse von $2\frac{1}{2}$ Z. Oeffnung beleuchtete, wurde dieses Ende ein sehr starker

Nordpol, das andere ein nicht minder starker Südpol.

15.

Aus diesen Versuchen glaube ich mit ziemlicher Sicherheit den Schluss ziehen zu können, dass jede Ungleichheit der Beleuchtung der verschiedenen Theile einer Stahlnadel durch unzerlegtes Sonnenlicht in derselben Magnetismus erzeuge, und dass der das Licht stärker reflectirende Theil ein Nordpol werde. Daraus erklären sich auch viele Erscheinungen, die man sonst nur auf eine unbestimmte Weise zu erklären vermochte. So z. B. ist bekannt, dass die natürlichen Magnete meistens nur zu Tage vorkommen. Man hat dieses zwar von jeher der Einwirkung des Lichtes zugeschrieben, aber aus den vorhergehenden Versuchen ersieht man, dass die vorzüglichste Ursache des Magnetischwerdens in der Ungleichheit der Beleuchtung liege, die bei einem Körper, der auf der Erde aufliegt, nothwendig Statt finden muss.

Eine andere Erscheinung, die ich eher kennen lernte, als das gerade aufgestellte Gesetz, und die mich bald zu einem unrichtigen Schlusse verleitet hätte, war die, dass eine Nadel aus Stahl, die man an einem Ende blau, oder vielmehr violett anlaufen und dann in einem lichten Orte liegen lässt, schon nach wenigen Minuten am blauen Ende einen Südpol, am anderen einen Nordpol bekommt. Ich glaubte anfänglich hierin ein allgemeines Gesetz zu erblicken, um so mehr, da ich an einem Tage 16 Stahlnadeln ohne Ausnahme auf diese Weise ziemlich starken Magnetismus ertheilen konnte; allein weil es

mir an einigen der folgenden Tage durchaus nicht gelingen wollte, durch dasselbe Verfahren irgend eine magnetische Kraft hervorzurufen, so wurde ich gezwungen, die Versuche abzuändern, und der Leser weiss, zu welchem Gesetze sie führten. Diesem gemäss liegt die Ursache des Magnetischwerdens einer blau angelaufenen Nadel darin, dass das blaue Ende nicht so viel Lichtstrahlen reflectirte, als das andere, und dass das Misslingen mancher Versuche in einer zu geringen Ungleichheit der beiden Endtheile seinen Grund habe.

Es ist bekannt, dass man zu Carlsbad in Böhmen Stricknadeln verfertiget, welche mit blauen in Gestalt eines breiten Schraubenganges um den Cylinder herumlaufenden Stellen versehen sind. Nach dem Vorausgegangenen müsste eine jede Nadel dieser Art mit mehreren magnetischen Polen versehen seyn, wenn sie dem Lichte ausgesetzt war. Ich konnte leider nur drei Stücke bekommen, wovon nur eines ganz ungebraucht war, und dieses hatte wirklich an mehreren blauen Stellen Süd-, an den hellen aber Nordpole. Die zwei anderen zeigten nur an den zwei Extremitäten magnetische Pole; es waren aber auch die blauen Stellen von den lichten kaum mehr zu unterscheiden.

16.

Man kann das Magnetischwerden der angelaufenen Stahlnadeln nicht der Wirkung der beim Anlaufen Statt findenden Temperaturerhöhung zuschreiben, denn es wurde keine meiner Stahlnadeln magnetisch, die in dünnes Rollenmessing (Rauschgold)

eingeschlossen, und mit demselben bis zum Blauanlaufen erhitzt, und hierauf, ohne die Messingdecke wegzunehmen, dem Lichte ausgesetzt war. Ja die genannten Carlsbader Stecknadeln werden nicht durch Wärme blau gemacht, und befolgen doch dasselbe Gesetz.

17.

Um die Resultate meiner Versuche mit aller Treue anzugeben, muss ich noch bemerken, dass ich einigemal das gelb angelaufene Ende einer Stahlnadel, mit einem Nordpol versehen, bemerkte, ein Phänomen, das sich nicht wohl unter das vorher angeführte Gesetz bringen lässt. Allein dieses ist die einzige Anomalie, die mir aufstiess, welche aber bei der grossen Anzahl von Versuchen, die ich anstellte, so selten vorkam, dass auf zwanzig Fälle, die sich nach dem genannten Gesetze richteten, kaum einer der anomalen vorkam. Vielleicht führen weiter fortgesetzte Versuche zu einem noch allgemeineren Gesetze, welches auch diesen Fall in sich enthält. Immer werden aber solche Versuche wichtige Anwendungen gestatten, und dem Physiker vorzüglich die Mittel an die Hand geben, die Magnetnadeln gegen die schwächende Einwirkung der Wärme zu sichern, und eine Gleichförmigkeit in der Kraft zu erhalten. Aus den bis jetzt angestellten Versuchen kann man schon abnehmen, dass es zweckmässig sey, die Nordhälfte einer Magnetnadel hell zu poliren, und die Südhälfte dunkel zu lassen.

II. Ueber eine Eigenschaft des Lichtes, die sich beim Anblick kleiner leuchtender Puncte mittelst eines Fernrohres zeigt, von Professor Amici.

(Edinb. Journ. of science. Nr. 8. p. 306.)

Die Eigenschaft des Lichtes, von welcher hier die Rede ist, setzt uns in den Stand, die Scheiben der Jupiters Trabanten, die einen merklichen Durchmesser haben, von denen der Fixsterne, deren Durchmesser für unsere Augen unmerklich ist, zu unterscheiden.

Als ich diese Sterne mit meinen Telescopen beobachtete, an welchen ein Micrometer aus einem getheilten Objectivglas angebracht war, und die Vergrösserung so weit trieb, dass sie hinreichte, obigen Unterschied erkennbar zu machen, und ich die beiden Bilder durch Verschieben der Halblinsen von einander trennte; so bemerkte ich, dass die leuchtenden Scheiben verlängert, und in ovaler Form erschienen. Der kleinere Durchmesser der so gebildeten Ellipse ist dem der primitiven Scheibe gleich.

Diese Verlängerung liegt, vorausgesetzt, dass das Telescop wohl centrirt ist, in einer auf dem Durchschnitt der Micrometerlinse senkrechten Richtung; sie findet aber nur bei Fixsternen Statt, deren Durchmesser dem Auge unmerklich ist, und wenn die Vergrösserung zwischen dem 100 und 1000 fachen liegt.

Objecte von bemerkbarem Durchmesser, wie Planeten, sind dieser Lichtausdehnung, die ihre Gestalt

ändert, nicht unterworfen, wenigstens war ich nicht im Stande, sie zu bemerken. Ich habe verschiedene Male bemerkt, dass die Scheiben der Jupiters Trabanten, wiewohl sie kleiner erscheinen, als ein Fixstern, vollkommen kreisrund bleiben, und wohl begränzte Umrisse haben, selbst wenn ihr Bild verdoppelt erscheint. Dieses verschafft uns ein leichtes Criterium, wodurch man eine wirkliche Scheibe von einer scheinbaren, und mithin auch auf den ersten Blick einen neuen Planeten von einem Fixsterne unterscheidet. Denn hat der Planet nicht eine ausserordentlich kleine Scheibe, so behält diese ihre Gestalt bei, wenn man beide Linsen des Micrometers von einander trennt, während sich das Bild verlängert, wenn es einem Fixsterne angehört. *)

Bei der Untersuchung der Ursache dieses Phänomens überzeugte ich mich, dass die Verlängerung des Bildes nicht von den zwei Halblinsen abhängt. Wird die halbe Oeffnung des Spiegels eines Newton'schen Telescopes mittelst eines halbkreisförmigen Schirmes verdeckt, in welchem Falle man ein Bild erhält, wie durch eine halbe Linse, so bemerkt

---

*) W. Herschel hat in den Philos. transact. für das Jahr 1805 einige Experimente bekannt gemacht, um die Gränzen der Sichtbarkeit kleiner Objecte mittelst der Telescope auszumitteln. Er fand, dass die vom mittleren Theil des grossen Spiegels reflectirten Strahlen die falsche Scheibe zu vergrössern suchen, während die vom Umfange desselben reflectirten sie zu vermindern streben. Die verschiedene Wirkung der innern und äussern Strahlen, die von einem Spiegel von 10 Fuss Brennweite reflectirt werden, gibt ein Criterium, zur Unterscheidung einer falschen Scheibe von einer wahren, vorausgesetzt, dass ihr Durchmesser $\frac{1}{4}$ Secunde übertrifft.

man dieselbe Erscheinung. Wenn man den Schirm rund herum dreht, so, dass immer der halbe Spiegel bedeckt bleibt, so hat die Verlängerung des Bildes eines Sternes immer nach einer Richtung Statt, die auf der Linie senkrecht ist, welche die offene Hälfte des Spiegels von der bedeckten trennt.

Man kann sich leicht überzeugen, dass diese Wirkung nicht von der Abweichung des Lichtes im Spiegel abhängt, weil sie da nach der Richtung des Durchmessers des halbkreisförmigen Schirms und nach dem Schnitt der Halblinse erfolgen müsste.

Um gewiss zu werden, dass die Verlängerung des Bildes nicht von der Aberration wegen der Kugelgestalt herrühre, stellte ich an das Ende eines Spiegel-Fernrohrs eine rechteckige Oeffnung, wovon eine Seite dem Vierfachen der anderen glich und brachte sie symmetrisch um die Axe des Tubus an. Wäre die Abweichung merklich, so hätte sie sich durch Dilatation der Scheiben des Sternes nach der Richtung der grösseren Seite des Rechteckes zeigen müssen. Dieses fand aber nicht Statt. Das Bild des Sternes erschien mit zwei langen leuchtenden Schweifen, die immer senkrecht auf der grösseren Seite des Rechteckes blieben, wenn man den Schirm in die Runde drehte.

Es scheint mir daher dieses Phänomen von einer Beugung des Lichtes an den Seiten der Blendung herzukommen. Dieses wird durch ein anderes Factum, das ich beim Gebrauch der Newton'schen Fernröhre kennen lernte, bestätiget. Richtet man ein solches Telescop gegen einen Stern, und rückt das Ocularglas näher an den Spiegel, als die Deutlichkeit des

Sehens fordert, so bemerkt man am Rande der leuchtenden Scheibe, welche die Gestalt des Spiegels hat, einen sehr schmalen hell leuchtenden Streifen und einen, der selbst den Schatten des kleinen Spiegels und des Armes, welcher ihn trägt, begrenzt. Dieselbe Erscheinung findet auch Statt, wenn man das Ocularglas über die Gränze des deutlichen Sehens herauszieht. Ich kann dieses Phänomen keiner andern Ursache zuschreiben, als der Beugung des Lichts am Rande des kleinen Spiegels und seines Trägers und am Rande des grössern Spiegels.

Wenn man das Entstehen des Bildes eines Sternes aufmerksam untersucht, während man das Ocularglas vom Punct des undeutlichen auf den des deutlichen Sehens bringt, so wird man sehen, dass die falsche Scheibe des Sternes grösstentheils, meistens ganz von den eben erwähnten leuchtenden Streifen ausgeht. Wenn man kein Mittel findet, diesem Uebel abzuhelfen, so setzt dieses der Vergrösserung durch Telescope ein Ziel, die man sonst ins Unbegränzte treiben könnte, wenn man die Spiegel so zu machen im Stande wäre, dass ihr Bild an Deutlichkeit dem Gegenstande gleich käme.

Phänomene, welche den hier beschriebenen ähnlich sind, treten auch an achromatischen Telescopen ein; bei diesen ist die Erscheinung solcher Scheiben noch merkwürdiger. Das Bild eines leuchtenden Punctes ist da mit einer Reihe concentrischer Ringe umgeben, die man leicht entdeckt, wenn man das Ocularglas abwechselnd über die Entfernung des deutlichen Sehens hinaus oder hinein schiebt. Die Ursache scheint in beiderlei Telescopen dieselbe zu

seyn, nur ist in achromatischen Instrumenten eine gewisse Einrichtung der Erzeugung solcher Strahlen besonders günstig. Die Erfahrung lehrte mich Doppelobjective so machen, dass ich einen Ring, oder eine grössere Anzahl derselben erzeugen kann, wenn ich das Ocularglas über den Punct des deutlichen Sehens hinausrücke.

III. Ueber die ungleiche Vertheilung der Wärme in einer thätigen Volta'schen Säule von I. Murray.

(Edinb. philos. joun. Nr. 27. p. 57 etc.)

Murray glaubt durch folgende Versuche über einige bis jetzt unerklärbare Erscheinungen, bei galvanischen Wirkungen, besonders über die von Seebeks, Dessaigne, Moll, von Beek etc. hervorgebrachten thermo-electrischen Phänomene Licht zu verbreiten, und auch zu einer naturgemässeren Theorie der Gewitter den Weg zu bahnen.

Er nahm 4 Porcellantröge mit Platten, die nach Wollastons Angabe eingerichtet waren, jeder Trog hatte 10 Zellen, und jede Platte 4 Q. Zoll Oberfläche. Jeder Trog enthielt $1\frac{1}{2}$ Unzen Salpetersäure und im übrigen Wasser. Der Apparat war im Stande, ein 6 Zoll langes Stück Platindraht, der $\frac{1}{50}$ Z. im Durchmesser hielt, glühend zu machen.

1. Versuch. Die Temperatur der Luft war 66° F., die des Wassers in den Zellen vor dem Versuche 64° F.

Während der galvanischen Wirkung stieg die Temperatur in

der 1. Zelle (des ersten Troges der den Zinkpol enthielt) auf .			99°F.		Differenz zwischen der grössten und kleinsten Temperatur 13° F.
2.	—	—	102	—	
3.	—	—	104	—	
4.	—	—	106	—	
5.	—	—	108	—	
6.	—	—	110	—	
7.	—	—	111	—	
8.	—	—	112	—	
9.	—	—	110	—	
10.	—	—	108	—	

in der 1. Zelle des zweiten Troges auf			99°F.		Differenz zwischen der grössten und kleinsten Temperatur 11° F.
2.	—	—	100	—	
3.	—	—	102	—	
4.	—	—	102	—	
5.	—	—	102	—	
6.	—	—	99	—	
7.	—	—	97	—	
8.	—	—	95	—	
9.	—	—	93	—	
10.	—	—	91	—	

in der 1. Zelle des dritten Troges auf			101° F.		Differenz zwischen der grössten und kleinsten Temperatur 7° F.
2.	—	—	104	—	
3.	—	—	106	—	
4.	—	—	108	—	
5.	—	—	108	—	
6.	—	—	108	—	
7.	—	—	106	—	
8.	—	—	105	—	
9.	—	—	103	—	
10.	—	—	101	—	

in der 1. Zelle des vierten Troges (der den Kupferpol enthielt) auf			100° F.	Differenz zwischen der grössten und kleinsten Temperatur 6° F.
2.	—	—	102 —	
3.	—	—	103 —	
4.	—	—	104 —	
5.	—	—	103 —	
6.	—	—	101 —	
7.	—	—	100 —	
8.	—	—	100 —	
9.	—	—	99 —	
10.	—	—	96 —	

Wiewohl bei diesem Versuche das Zink stark angriffen wurde, und daher die Resultate etwas zweideutig wurden, so konnte man doch daraus ersehen, dass die Temperatur vom positiven Pol zum negativen Gradweise abnimmt. In jedem Tage zeigte sich das Maximum der Temperatur in den mittleren Zellen, nahm aber gegen den negativen Pol mehr ab, als gegen den positiven. Diese Thatsachen beweisen, dass mit den galvanischen Phänomenen auch eine ungleiche Vertheilung der Wärme in Verbindung steht.

Zu folgendem Versuche wurden die Platten aufgefrischt, und die Säure von derselben Stärke genommen wie vorhin. Die Temperatur des Wassers war 62° F. Die Batterie machte einen 14 bis 15 Z. langen Platindraht von $\frac{1}{100}$ Z. im Durchmesser weiss glühend. Die Temperatur der Flüssigkeit in den einzelnen Zellen, die gemessen wurden, bevor die Platten herausgenommen waren, und wenn die Thätigkeit der Säule darauf beschränkt war, einen wenige Zoll langen Draht glühend zu machen, war wie folgt:

Erster Trog.			Zweiter Trog.		
Kupfer-ende.	Letzte Z.	101° F.	Letzte Zelle	125° F.	
	Mittlere	— 106 —	Mittlere	— 140 —	
	Erste	— 112 —	Erste	— 135 —	

Dritter Trog.			Vierter Trog.		
Letzte Zelle	138° F.		Letzte Zelle	136° F.	
Mittlere	— 141 —		Mittlere	— 142 —	
Erste	— 138 —		Erste	— 142 —	(Zinkende)

Hieraus sieht man, dass das Minimum der Temperatur am Kupferende, das Maximum am Zinkende Statt findet.

In dreien der genannten Tröge war die höchste Temperatur in der Mitte.

Sobald die Platten aus der Flüssigkeit genommen waren, zeigten sich in ihr folgende Temperaturen:

	1. Trog.	2. Trog.	3. Trog.		4. Trog.
Kupferende.	1. Z. 101 °F.	1. Z. 123° F.	1. Z. 128°F	Zinkende	1. Z 128°F.
	2. — 106 —	2. — 125 —	2. — 129 —		2. — 129 —
	3. — 109 —	3. — 127 —	3. — 130 —		3. — 131 —
	4. — 110 —	4. — 129 —	4. — 131 —		4. — 133 —
	5. — 111 —	5. — 131 —	5. — 132 —		5. — 134 —
	6. — 112 —	6. — 133 —	6. — 133 —		6. — 134 —
	7. — 112 —	7. — 134 —	7. — 133 —		7. — 133 —
	8. — 113 —	8. — 133 —	8. — 131 —		8. — 133 —
	9. — 113 —	9 — 131 —	9. — 130 —		9. — 132 —
	10. — 110 —	10. — 129 —	10. — 129 —		10. — 132 —

Hier ist die Zunahme der Temperatur vom Kupferende zum Zinkende sehr gleichförmig, auch fällt wieder in jedem einzelnen Troge das Maximum in die Mitte. Zwischen der letzten Zelle am Kupferpol und der am Zinkpol findet ein Unterschied von 132° — 101° = 31° F. Statt.

Beim folgenden Versuche war die Lufttemperatur 63°, die Temperatur der in den Zellen enthaltenen, verdünnten Säure 64°,5 F. Sobald die Platten eingetaucht waren, wurden folgende Temperaturen beobachtet.

Zinkende			Kupferende
1. Trog	1. Z. 69°	Mittlere Z. 66°	Letzte Z. 67°
2. —	— — 70	— — 68	— — 75
3. —	— — 80	— — 75	— — 75
4. —	— — 94	— — 86	— — 84

Hieraus ergibt sich, dass vor dem Eintritte der vollen Wirkung der Batterie das Kupferende die höchste, das Zinkende die niedrigste Temperatur hat.

Als die Säure schon schwach wirkte, fand man vor der Wegnahme der Platten folgende Temperaturen:

Zinkende			Kupferende
1. Trog.	1. Z. 126°	Mittlere Z. 125°	Letzte Z. 124°
2. —	— — 126	— — 130	— — 126
3. —	— — 124	— — 128	— — 130
4. —	— — 124	— — 122	— — 120

Hier nimmt wieder die Temperatur vom Kupferende zum Zinkende gleichförmig zu.

Nach Wegnahme der Platten fanden folgende Temperaturen Statt:

	1. Trog.	2. Trog.	3. Trog.	4. Trog.	
Zinkende	1. Z. 122° F.	1. Z. 122° F.	1. Z. 121° F.	1. Z. 121° F.	Kupferende
	2. — 124 —	2. — 124 —	2. — 122 —	2. — 122 —	
	3. — 126 —	3. — 125 —	3. — 124 —	3. — 122 —	
	4. — 126 —	4. — 126 —	4. — 125 —	4. — 122 —	
	5. — 126 —	5. — 126 —	5. — 125 —	5. — 121 —	
	6. — 125 —	6. — 128 —	6. — 125 —	6. — 119 —	
	7. — 124 —	7. — 127 —	7. — 125 —	7. — 116 —	
	8. — 123 —	8. — 126 —	8. — 125 —	8. — 116 —	
	9. — 120 —	9. — 124 —	9. — 129 —	9. — 116 —	
	10. — 120 —	10. — 122 —	10. — 126 —	10. — 116 —	

Diese Thatsachen scheinen folgende Fragen an die Hand zu geben: Modificirt die erregte Electricität diese Vertheilung der Wärme, oder bringt sie die chemische Einwirkung der Säure auf die Metalle von verschiedener Leitungsfähigkeit herbei, und ist die Electricität die Folge dieser ungleichen Vertheilung?

Es mag nun die Electricität aus einer ungleichen Vertheilung der Wärme, oder diese Vertheilung aus der Electricität hervorgehen, so ist doch die Electricität zur Ausgleichung dieser Ungleichheit bestimmt, und daher hat ein Gewitter das Gleichgewicht der Wärme aufzuheben nnd herzustellen. Zur Unterstützung dieses Schlusses führt Murray eine von ihm auf einer Reise von Basel nach Paris bemerkte Temperaturänderung an. Am 10. September zeigte ihm um 6¼ Uhr Nachmitt. das Thermometer 79° F., und Wolken am Horizont verkündeten ein fernes Gewitter. In 10 Minuten stieg das Thermometer auf 84°,5, und nach einer Viertelstunde auf 74°; da bemerkte er schon in der Ferne Blitze. Hierauf stieg die Temperatur auf 90°, fiel aber nach 7 Uhr auf 73°. Nach diesem stieg sie auf 78°.

IV. Siedhitze oder Salzauflösungen von Griffiths.

(Annales de l'induct. nat. et étrang. Nr. 75 p. 298.)

Griffiths unternahm eine Reihe von Versuchen, um die Siedhitze gesättigter Salzauflösungen und die Menge eines Salzes, die bei dieser Temperatur aufgelöst ist, zu bestimmen. Er wählte dazu

nur die wichtigsten Salze, und diejenigen, welche nicht gar zu leicht auflöslich sind, und ihre Zusammensetzung in der Hitze nicht ändern. Zur Ausmittelung dieser Temperatur setzte er Wasser mit einem grossen Ueberschuss an Salz in einem tonnenförmigen Porcellangefäse der Hitze einer Argand'schen Lampe aus, und brachte in der Mitte der Flüssigkeit ein Thermometer an. Wenn die Flüssigkeit im vollen Kochen war, las er den Thermometergrad genau ab. Das Barometer stand während der wenigen Tage, durch welche seine Versuche dauerten, auf 30 Z. (englisch).

Die erste Rubrik der folgenden Tafel gibt den Namen des Salzes an; die zweite, die Menge Salz, die in 100 Theilen der kochenden Auflösung enthalten war; und die dritte den Hitzegrad beim Kochen.

Name der Salze.	Trockenes Salz in 100 Theilen.	Siedpunct nach Fahrenheit.
Essigsaure Soda	60	256°
Salpetersaure Soda . . .	60	246
Steinsalz	90	240
Salpeter	74	238
Salzsaures Ammonium . .	50	236
Schwefelsaurer Nickel . .	65	235
Weinsteinsaures Kali . .	68	234
Salzsaure Soda	30	224
Salpetersaurer Strontian .	53	224
Schwefelsaure Bittererde .	57.5	222
Ueberschwefelsaures Kali .	unbestimmt	222
Borax	52.5	222
Phosphorsaure Soda . . .	unbestimmt	222
Kohlensäuerliche Soda . .	unbestimmt	222
Salzsaurer Baryt	45	220
Schwefelsaures Zink . . .	45	220
Alaun	52	220
Sauerkleesaures Kali . . .	40	220
- - - - Ammoniak	29	218
Blausaures Kali	55	218
Chlorsaures Kali	40	218
Boraxsäure	unbestimmt	
Schwefelsaures Kupferkali .	40	217
- - - - Kupfer . .	45	216
- - - - Eisen . .	64	215
Salpetersaures Blei . . .	52.5	216
Essigsaures Blei	41.5	215
Schwefelsaures Kali . . .	17.5	215
Salpetersaurer Baryt . . .	26.5	214
Doppelt weinsteinsaures Kali	9.5	214
Essigsaures Kupfer . . .	16.5	214
Blausaures Quecksilber . .	3.5	214
Aetzendes Sublimat . . .	unbestimmt	214
Schwefelsaure Soda . . .	13.5	213

Bei der Bestimmung der Zahlen der ersten Rubrik wurde ein Theil der kochenden Auflösung ab-

gewogen, das Wasser durch Verdünstung vertrieben, und die Menge des rückständigen Salzes bestimmt. Es scheint demnach, dass die auflöslichsten Salze in der Lösung in der grössten Menge vorhanden seyn, und die höchste Siedhitze darbieten müssen, allein mehrere einzelne Fälle machen davon eine Ausnahme, besonders schwefelsaure Soda, wovon in der Auflösung nur 51.5 pCnt. enthalten sind, und die Siedhitze des reinen Wassers nur um einen Grad erhöhen. *)

Die Temperaturerhöhung scheint weder von der Menge des Salzes, noch von dessen Auflöslichkeit abzuhängen. Weinsteinsaures Kali, das sehr leicht zerfliesst (68 Th. in 100 Th. der Auflösung) kocht bei 234°, während salzsaures Ammonium, auf welches die Luft keine Wirkung ausübt und wovon 100 Th. der Auflösuug nur 50 Th. Salz enthalten, bei 233° siedet. Eine Auflösung von 90 Th. Steinsalz kocht bei 240°, die der essigsauren Soda, welche nur 60 Th. enthält, bei 256°; endlich kocht die Auflösung des blausauren Quecksilbers und des doppelweinstein sauren Kali bei derselben Temperatur, wo doch das eine 35 p. C., das andere nur 5 pCnt. trockenen Salzes enthält.

Von folgenden Auflösungen konnte Griffith die Siedhitze nur beiläufig bestimmen, weil sie sehr schwer gesättiget zu erhalten sind. Seine Soda kochte bei 420°, und griff die Thermometerkugel an,

*) Beim Versuche wurden die Krystalle dieses Salzes durch die Wärme geschmolzen, und kochten in ihrem eigenen Krystallisationswasser.

salpetersaures Ammonium bei 360°, salpetersaures Kupfer bei 344°, kaustisches Kali bei 316°, Sauerkleesäure, welche in der Hitze anschwoll und sich sublimirte, bei 250°.

Als er eine Auflösung von kohlensaurem Ammoniak der Hitze aussetzte, schien sie bei 180° zu kochen, vermehrte er die Temperatur, so verdünstete das Salz, und verschwand gänzlich, als das Wasser seinen Siedpunct erlangt hatte.

V. Ueber die negative Electricität der Regenschauer von I. Foggo.

(Journ. of Science. Nr. VII. p. 124.)

Man sieht gewöhnlich die plötzlichen und häufigen Abscheidungen des Wassers aus der Luft als Wirkungen der Electricität an. Hagelschauer ist immer mit Spuren von Electricität verbunden, die oft zu einer Intensität steigt, dass sie Donner und Blitz erzeugt. Bei jedem Regen lassen sich grössere oder geringere Anzeigen von Electricität bemerken, jedoch wird bei einem weit um sich greifenden Landregen das Electrometer selten mehr afficirt, als es durch die blosse, in der Luft vorhandene Feuchtigkeit bewirkt werden kann. Die Regen, bei denen der Einfluss dieses Fluidums entschieden ist, haben einen sowohl vom Landregen als vom heftigen, bei Sturmwetter vorkommenden Schauer, ganz verschiedenen Charakter. Jene erstrecken sich nicht weit, dauern kurze Zeit, und der Wasserniederschlag ist besonders anfangs sehr heftig. Geht ihnen trockenes und

kaltes Wetter voraus, so zeiget sich ihre Wirkung vorzüglich dadurch, dass die Vegetation schnell eine Frische und Fülle erreicht, die durch künstliches Bewässern oder durch einen gewöhnlichen Regen nicht erreicht wird. Sie unterscheiden sich auch von anderen durch die Regelmässigkeit, mit welcher die Beschaffenheit der Electricität sich ändert. Wenn bei schlechtem Wetter die Luftelectricität negativ ist, so erfolget der Wechsel derselben mit der positiven im Allgemeinen so schnell, dass es schwer hält, ihn anzumerken, und zwischen diesem Wechsel findet oft einige Zeit gar keine electrische Spannung Statt. Bringt man ein Electrometer an einer leitenden Stange an, während sich eine electrische Regen- oder Hagelwolke nähert, so bemerkt man folgende Erscheinungen: So lange die Wolke in einiger Entfernung von der Stange ist, hat die Luft gewöhnlich positive Electricität; steht einmal der vorangehende Theil der Wolke über dem Leiter, so verliert sich die Electricität, und wird dann gar negativ. Dieser Zustand dauert nur eine kurze Weile, geht in den positiv-electrischen über, welcher anhält, bis die Wolke vorüber gegangen ist, wo wieder — E hervortritt, die selbst durch die natürliche positive E der Atmosphäre verdrängt wird.

Howard in London scheint zuerst bemerkt zu haben, dass die Electricität im Umfange einer regnenden Wolke (nimbus) negativ, in ihrem Mittelpuncte hingegen positiv ist. Dieser erfahrne Meteorologe beobachtete auch, dass die negative Electricität von unten hinauf, die positive aber von oben herab komme.

Ich wollte mich im Jahre 1825 von der Richtig-

keit dieser Meinung überzeugen, weil ich sie für geeignet hielt, einige electrische Phänomene zu erklären, die noch völlig unerklärbar sind. Ich bereitete mir zu diesem Zwecke einen Apparat, welcher dem von Bennet angegebenen ähnlich ist, und mit einem Goldplatt-Electrometer in Verbindung steht. Am 12. März 1824 erhob sich ein lebhafter Wind aus NW. mit häufigen Regenwolken. Um 3 Uhr Nachmittags ging eine dichte grosse Wolke über mein Zenith, und liess einige Hagelkörner fallen. Der Leiter ward mit einer rauchenden Lunte versehen, und aus einem gegen Süden gelegenen Fenster aufgerichtet. Während der Schauer nachliess, war die Electricität immer positiv, und machte die Plättchen des Electrometers stark divergirend. Es war auch wirklich die electrische Spannung der Luft so gross, dass das vom Leiter abgesonderte Electrometer durch geringes Reiben des Metalldeckels mit Seide völlig geladen war, und die Plättchen durch Reiben der Aussenseite des Glases mit weichem Leder um 40° divergirend gemacht wurden. Während des Regengusses, oder wenn die Wolken über mir standen, ohne dass ein Niederschlag Statt fand, war die Luftelectricität unveränderlich positiv, und so stark, dass ich manchmal mit den Fingern Funken aus dem Leitungsdraht gewinnen konnte; auch war ich im Stande, die Electricität nach Belieben durch Anfassen des Schaftes des Leitungsdrahtes vom Electrometer abzuhalten, zum Beweise, dass sie von den Wolken oder aus der Atmosphäre kam. Wenn aber der Rand der Wolken über dem Electrometer stand, zeigte sich negative Electricität, und zwar eben so stark, wie die positive;

jedoch konnte ich diese nicht wie die vorige durch Anfassen des Drahtes oder durch Berührung mit einer Metallspitze ableiten. Sie kam also nicht wie jene von den Wolken, sondern war durch die Erde den Wolken ertheilt. Brachte man eine Stahlspitze in die Nähe des Instrumentes, so nahm die Divergenz der Plättchen so sehr zu, dass sie dadurch sogar gefährdet wurden, und man hörte rasche Funken zwischen dem Electrometer und der Spitze wechseln, während man starke Stösse fühlte, wenn man die Finger an den Metalldeckel brachte.

Bei Versuchen über atmosphärische Electricität fand ich die Anwendung des Instrumentes meistens sehr zweckmässig, welches Fig. 1 darstellt, und aus einer kleinen Kugel besteht, die an feinem Silberdraht hängt, welcher selbst mittelst Siegellack an dem Deckel der ganzen Vorrichtung befestiget ist. Dieser Deckel ist aus Holz gedrechselt und durch ihn gehen zwei Glasröhren AA, die $\frac{1}{3}$ Zoll im Durchmesser haben, inwendig mit Siegelwachs überzogen, und am unteren Ende mit einem metallenen Knopf versehen sind. An eine dieser Röhren reicht die Schnur vom Leitungsdraht, um diesen mit dem unteren Knopfe in leitende Verbindung zu setzen; eine ähnliche Schnur verbindet den Knopf der zweiten Röhre mit der Erde. Letztere ist über 2 Klafter lang, und bis auf das Ende mit geöhlter Seide überzogen. Wird dieses Instrument mit dem Leiter verbunden, dieser aufgerichtet, während die andere Schnur mit der Erde in Verbindung bleibt, so wird die kleine Kugel vom Knopfe an der entsprechenden Röhre angezogen. Sobald sie eine electrische Ladung bekommen hat, wird sie

abgestossen, erreicht den anderen Knopf und schwingt zwischen diesen beiden so lange, als der Conductor Electricität erhält. Da man die Isolirung der kleinen Kugel leicht herstellt, so ist dieses Electrometer empfindlicher, als eines mit zwei kleinen Kügelchen oder mit Goldplättchen.

VI. Bericht über den merkwürdigen Gang einer Pendeluhr von A. Baumgartner.

Herr Kohn, einer meiner diessjährigen Zuhörer, der die Uhrmacherkunst ordentlich erlernt hatte, verfertigte sich eine astronomische Pendeluhr, und setzte die Pendelstange aus vier neben einander befindlichen gläsernen Röhren von der Dicke, wie man sie zur Construction der Barometer braucht, zusammen, damit die Wärme auf den Gang der Uhr einen möglichst kleinen Einfluss haben sollte. Er fand auch wirklich diesen Gang sehr regelmässig, so lange sich das bleierne, in Messing gefasste Gewicht über oder unter der Linse des Pendels befand, die aus demselben Materiale verfertiget war; sobald aber das Gewicht der Linse gegenüber zu stehen kam, begann die Uhr gegen ihren sonstigen Gang stark zu retardiren und blieb endlich ganz stehen. Der Besitzer dieser Uhr glaubte sich überzeugt zu haben, dass dieses nicht von einem Aneinanderstossen der Linse und der Gewichte herrühre; wirklich sind beide von einander um 1 Zoll entfernt, das Gewicht konnte wegen seiner Grösse wohl durch zufällige Stösse, welche durch vorbeirollende Wägen er-

zeugt werden, nicht leicht in Schwingungen gerathen, auch erfolgte das Stillstehen bei Nacht, wo sich wenig regte, eben so gut, wie bei Tage, und unabhängig von jeder Witterung. Dieses Verhalten wurde durch 9 Monate beobachtet, ohne dass eine einzige Ausnahme Statt fand, wiewohl innerhalb dieser Zeit das Gewicht dem Pendel oft gegenüber zu stehen kam.

Als mir diese Thatsache bekannt wurde, vermuthete ich, es sey eine electrische Wirkung im Spiele, und rieth Herrn Kohn, die Isolirung der Linse mittelst eines Metallfadens aufzuheben. Als zu diesem Zwecke ein feiner Draht durch eine der vier Glasstangen gesteckt und so die leitende Verbindung zwischen der Linse und den übrigen Theilen der Uhr hergestellt ward, blieb sie zwar nicht mehr stehen, wenn das Gewicht der Linse gegenüber kam, aber sie blieb doch gegen ihren sonstigen Gang stark zurück. Ich glaubte nun wirklich den Grund obiger Erscheinung in eine electrische Spannung setzen zu müssen, wollte mich aber doch genauer von der Sache überzeugen, und prüfte daher die Linse, als sie wieder isolirt war, mittelst eines sehr empfindlichen Bohnenberger'schen Electrometers, erhielt aber nur schwache Spuren positiver Electricität. Das Gewicht fand ich gar nicht electrisch und doch blieb die Uhr wieder wie vorher stehen. Der Eigenthümer setzte die electroscopischen Versuche fort, und isolirte sowohl das Pendel als auch das Gewicht, indem er letzteres an seidene Fäden hing. Als Ergebniss seiner Versuche berichtete er mir, er habe bemerkt, dass in diesem Zustande der Isolirung des Pendels und

des Gewichtes die Retardation der Uhr gegen mittlere Zeit innerhalb 24 St. 55″ betrage, und dass sich das Pendel positiv electrisch zeige, das Gewicht hingegen gar keine electrische Spannung bemerken lasse. So wie das Gewicht dem Pendel gegenüber zu stehen kommt, verliert dieses die Electricität, das Gewicht zeigt + E, die Uhr retardirt stündlich um volle 2″ — 3″ und bleibt endlich ganz stehen.

Sollte wohl diese geringe electrische Einwirkung den Gang eines so kräftigen Pendels ganz hemmen können, oder liegt eine andere Ursache zum Grunde?

VII. Verbesserte und neue physikalische Instrumente und Methoden.

1.

Amici's Microscop, verbessert von Goring.

(Journal of Science and the arts Nr. 41 pag. 34).

J. Cuthbert, ein englischer Künstler, ward durch das Lob, welches man dem von Amici erfundenen catoptrischen Microscope in Gilberts Annalen und im 18 B. der Abhandlungen der italienischen Societät ertheilte, bewogen, ein solches Instrument zu construiren. Er gab aber dem Objectivspiegel eine Brennweite von 3 Z., bei einer Oeffnung von 1½ Z., während bei Amici diese Brennweite 2,6 Z., und die Oeffnung 1 Z. betrug, die Spiegel bekamen eine genaue Figur, und doch fand er die Wirkung des Instrumentes seiner Erwartung nicht gemäss. Goring lieh ihm eigene, sehr schwer deutlich zu

machende Objecte, beide konnten aber nicht zu Stande bringen, dass man eines derselben deutlich sah. Eben so ungenügende Resultate soll Dollond mit einem von ihm verfertigten Microscope erhalten haben, und doch glaubte man nicht zweifeln zu können, dass diese Instrumente genau nach Amici's Angabe ausgeführet seyen, ja es schien Cuthberts Einrichtung dieses Instrumentes sogar einigen Vorzug vor dem von Amici gewählten zu haben, weil der elliptische Spiegel mehr Oeffnung im Verhältniss zu seiner Brennweite hatte, um so mehr, da Goring in der Mitte des Gesichtfeldes eine neblige Stelle bemerket hat, die daher kommen soll, dass der kleine Plan-Spiegel zu viel vor dem elliptischen deckt und doch dieser gedeckte Theil nach Amici's Dimensionen mehr als die halbe Oeffnung, nach Cuthberts aber nur die Hälfte derselben beträgt.

Da nun Goring meinte, Amici habe die beste Eigenschaft seines Instrumentes der Möglichkeit einer besseren Beleuchtung der Objecte geopfert, indem er die Brennweite des elliptischen Spiegels so gross machte, und durch Versuche gefunden haben wollte, dass zusammengesetzte Microscope mit einem Objectivglase von recht kurzer Brennweite die beste Wirkung thäten, so rieth er Cuthbert, wo möglich, dem Metallspiegel nur eine Brennweite von $\frac{1}{2}$ Z. und eine Oeffnung von $\frac{1}{4}$ Z. zu geben, und so die Länge des Instrumentes auf 4 — 5 Z. zu reduciren, und entwarf ihm zugleich den Plan zur mechanischen Einrichtung des Ganzen. Cuthbert führte alles dieses aus und so entstand ein Instrument, von dem Goring meint, er und Cuthbert können als eigent-

lichen Urheber desselben (legitimate parents) angesehen werden, und welches in Fig. 2 abgebildet ist.

AB ist das Fussgestell, das sich von dem eines kleinen Telescops nicht unterscheidet, ausser dass es eine Zugröhre C hat, die unten aufgeschlitzt ist, und gestattet, dem Instrumente eine Höhe von 10—15 Z. zu geben. Die Charnier D lässt sich durch einen Stift befestigen, um den Körper des Instrumentes in horizontaler Lage zu erhalten. Der Körper selbst ist in die Fassung F, mittelst einer Schraube eingeklemmt, und kann davon weggenommen werden, damit man das Fussgestelle auch allenfalls für ein kleines Fernrohr brauchen könne. Der Körper GH ist $6\frac{3}{4}$ Z. lang, und lässt sich durch eine Zugröhre auf 9 Z. verlängern, in welcher das Ocularstück seinen Platz hat. Solcher Stücke hat das Instrument 4 oder 5. Die Brennweite des vorderen Oculars mit der geringsten Vergrösserung beträgt $\frac{3}{4}$ Z., die mit der grössten $\frac{1}{10}$ Z. Sie sind wie in astronomischen Fernröhren eingerichtet, bestehen aus 2 Plan-convex Linsen und sind achromatisch. Die Röhre I enthält die Metallspiegel und ist in K eingeschraubt.

Es sind davon 4 Einsätze vorhanden mit folgenden

Oeffnungen	und Brennweiten.
0.3 Z.	0.6 Z.
0.3 —	1.0 —
0.6 —	1.5 —
0.3 —	4 —

Cuthbert will noch einen elliptischen Spiegel von 0.3 Z. Brennweite und 0.2 Oeffnung machen. Alle diese Spiegel sind gegen Staub und Feuchtigkeit durch einen Deckel geschützt, den man aufschrauben

kann, wenn sie nicht in den Körper des Instrumentes eingesetzt sind; ein Röhrensegment e schliesst dann die Oeffnung, durch welche die Lichtstrahlen in das Instrument gelangen. Der Querdurchmesser des schief gegen die Axe des Rohres gestellten Spiegels übertrifft nicht $\frac{1}{3}$ vom Durchmesser des anderen, und verursachet daher nicht die mindeste Trübung im Gesichtsfelde. Die Stange LM hat 4 Z. Länge, ist fest an dem Hals des Instrumentes mittelst der Klemmschraube N angemacht; sie ist dreieckig, an der Rückseite gezähnt. Der Träger O ist wie bei den gewöhnlichen Microscopen eingerichtet, eine Convexlinse P lässt sich an die federnde geschlitzte Röhre Q aufstecken, und dient zur Beleuchtung undurchsichtiger und transparenter Körper, weil man sie unter und ober dem Träger anbringen kann. Der Spiegel R ist eben, an der Rückseite am besten mit Pariser Gips (plaster of Paris) überzogen, um das directe Sonnenlicht zu reflectiren; dieses gewährt für transparente Körper eine vortreffliche Beleuchtung. Ein Hohlspiegel verursacht stets einige Undeutlichkeit, wiewohl er die Lichtstärke vermehrt. Für undurchsichtige Objecte kann man statt des Spiegels R die Convexlinse S anwenden, indem man sie in dieselbe Fassung einsetzt, die Kappe T an die Oeffnung der Röhre schiebt, welche die Spiegel enthält, und den Körper des Instrumentes in der Fassung F so weit herumdreht, bis die Stange LM einer Lampe oder einer andern Lichtquelle zugewendet ist.

Im übrigen ist dieses Instrument den gewöhnlichen zusammengesetzten Microscopen so ähnlich, dass es keiner weiteren Beschreibung bedarf.

Fig. 3 stellt einen Beitrag von Cuthbert vor, wodurch das Instrument in ein einfaches Microscop verwandelt wird. Bei a wird es an den Körper des Microscopes statt des Metallspiegels angeschraubt, die Stange b schiebt sich in ein viereckiges Loch, hat in c ein Knie, um die Bewegung nach der Seite zu gestatten, und gegen das Ende die microscopische Linse.

Fig. 4 stellt eine andere Einrichtung von Cuthbert vor, durch welche er das catoptrische Microscop in ein dioptrisches verwandelt. a stellt ein Stück vom Körper dieses Instrumentes, b ein Stück der oben beschriebenen Stange vor; beide sind mit einander mittelst einer Doppelklemmzange verbunden, die an einem Ende c den Körper des Instrumentes, am anderen d die Stange b umfasst, und sie durch die Schrauben e und f fest hält. Die Zeichnung g stellt einen Durchschnitt des Objectivglases vor. Es besteht aus zwei plan-convex Linsen, die Brennweite der vorderen h verhält sich zu der der hinteren i wie 2 : 3, während ihre gegenseitige Entfernung 1 ist, die flachen Seiten derselben sind dem leuchtenden Körper zugewendet; k dient zur Regulirung der Oeffnung. Goring empfahl die Einrichtung des Objectivglases dem Künstler Cuthbert statt der gewöhnlichen Biconvex-Linse, weil sie bei einer gegebenen Brennweite und Oeffnuug nur den vierten Theil der Abweichung wegen der Kugelgestalt hat. In l zeigt sich dieser Theil, wie er am Körper des Instrumentes angebracht ist.

Wenn bei dieser Einrichtung des Microscopes der elliptische Spiegel mehr Oeffnung haben soll, als

30°, so fällt sein Brennpunct in die Röhre, welche ihn enthält, und der querstehende Planspiegel müsste zu nahe an ihn gestellt werden. Bringt man aber das Object zwischen zwei durchsichtige Plättchen bb (Fig. 5) in einen Ausschnitt der Röhre bei aa, so dass er sehr nahe an den Planspiegel c zu stehen kommt, so kann man dem Hohlspiegel d eine Oeffnung von 60° geben, ohne die des ersten c zu vermehren. Die Röhre, welche sie enthält, muss aber eine grosse Oeffnung haben, die dem kleinen Spiegel in e gegenüber steht, und eine andere Röhre muss sich darüber schieben lassen, die dem Lichte durch f den Eintritt gestattet.

2.

Ein neues Mittel, sehr intensives Licht zu erzeugen, von Drummond.

(Annals of philosophy. Juni, 1826. p. 451.)

Drummond hat zum Behufe der Feuersignale, die man bei der Vermessung von Irland anzuwenden gedachte, mehrere pyrotechnische Präparate versucht, die, in dem Brennpuncte eines parabolischen Spiegels angezündet, ein hinreichendes Licht geben sollten, und unter andern auch das Verbrennen des Phosphors in Sauerstoffgas dazu benützen wollen, allein er fand, dass das so erhaltene Licht schlecht begrenzt, und auch in anderer Hinsicht nicht wohl zweckmässig sey. Er untersuchte nun auch das Licht, welches Erden- und Metalloxyde von sich geben, wenn sie in eine vom Sauerstoffgas genährte Weingeistflamme kommen. Um einen Vergleich anstellen zu können, nahm er das Licht,

welches vom hellsten Theil der Flamme einer Argand'schen Lampe ausging, als Einheit an, nahm die verhältnissmässige Stärke mehrerer aus der Intensität des durch sie gebildeten Schattens ab, und fand, dass das Licht, welches Aetzkalk aussendet, bei obiger Behandlung durch 37, das von Zircon durch 31, und das von Magnesia durch 16, der Intensität nach, ausgedrückt werden müsse. Zinkoxyd gab weniger Licht, als Magnesia. Die beste Kalkgattung zu diesen Versuchen ist Kreidekalk, (chalk lime), den man leicht zu kleinen mit einem Stiel versehenen Kügelchen formen, und deren Oberfläche man so regelmässig und genau machen kann, als es zur Erzeugung eines wohlbegrenzten, zu geodetischen Operationen erforderlichen Bildes nothwendig ist. Wenn der Versuch wohl geräth, so gibt solcher Kalk ein 83mal stärkeres Licht als eine Argand'sche Lampe. In dem Brennpuncte eines parabolischen Hohlspiegels erregt, blendet es selbst in einer Entfernung von 40 F. die Augen so sehr, dass man es nicht ansehen kann. L. Colby glaubt durch dieses Mittel den Meridian des Observatoriums am Calton Hill, zu Edinburg mit dem von Dublin mittelst der Zwischenstation Ben Lamond verbinden zu können, wiewohl eine Seite des Dreieckes über 90 Meilen (englische) misst. Drummond fand, dass ein Gemenge von Wasserstoff- und Chlorgas, welches diesem vom Kalk ausstrahlenden Lichte ausgesetzt wird, in Salzsäure verwandelt wird, und dass der violette Strahl, den man mittelst eines dreiseitigen Prismas daraus erhielt, eine merkliche Wirkung auf Hornsilber ausübt. Herschel untersuchte, wiewohl nur erst cursorisch, die Eigenschaften dieses Lichtes,

und fand, dass darin alle gewöhnlichen Strahlen enthalten, dass aber drei von ihnen ihrer Menge und Beschaffenheit wegen merkwürdig sind: nämlich der rothe, welcher zwischen dem rothen und orangefarbenen, aber näher am letzteren, im gewöhnlichen Farbenbilde vom Sonnenlichte liegt; ein gelber und ein grüner. Herschel führt an, dass das genannte Roth vom Kalk selbst herkomme, indem alle brennenden Körper, indem sie sich mit dieser Erde verbinden, ziegelrothes Licht von sich geben, das von dem carminrothen des Strontian ganz verschieden ist.

3.
Berzelius Verfahren, um Arsenik im Körper vergifteter Personen zu entdecken.

(Edinb. Journal of Science. Nr. VII. p. 131.)

Berzelius betrachtet die Reduction des Arseniks in den metallischen Zustand als den einzigen sicheren Beweis von der Anwesenheit desselben bei Vergifteten. Arsenik kann entweder als Arseniksäure in todten Körpern vorkommen, oder in den Eingeweiden aufgelöset enthalten seyn. Im ersten Falle ist er leicht zu entdecken. Man nehme zu diesem Zwecke ein über 3 Z. langes Stück einer Barometerröhre AB (Fig. 6), die an einem Ende zu einer engeren Röhre ausgezogen und verschlossen ist, gebe etwas von dem im Körper gefundenen Arsenik in diese Röhre, so dass es in den engeren Theil CB hinabfallen kann, gebe ein wenig Holzkohle darauf, nachdem sie von aller Feuchtigkeit dadurch befreit worden ist, dass man sie mit der Löthrohrflamme in Rothglühhitze gebracht hat.

Hierauf halte man die Röhre in eine Weingeistflamme, so dass B nicht von ihr getroffen wird, und verschiebe sie, sobald die Kohle roth geworden ist, damit der Arsenik von der Flamme getroffen wird. Dadurch wird er alsogleich verflüchtiget, reducirt und erscheint auf der anderen Seite der Flamme in metallischem Zustande. Bringt man die Flamme näher an das sublimirte Metall, so wird es in einen kleinen Raum des engen Theils der Röhre concentrirt und legt sich wie ein metallischer Ring an das Glas an, der polirtem Stahl ähnlich ist. Es ist nun noch übrig, durch den Geruch zu zeigen, dass das Sublimat Arsenik ist. Zu diesem Zwecke schneidet man die Röhre etwas über dem Sublimat mit einer Feile ab, erhitzt die Stelle, wo dieses sich befindet und hält sich mit der Nase in einer geringen Entfernung davon. Der Geruch wird den Arsenik bald verrathen. Wo man keinen festen Arsenik finden kann, muss man vom Inhalte des Magens und der Gedärme, so viel als möglich, sammeln, den Magen in Stücke schneiden, und diese seinem Inhalte beimengen. Alles wird dann in einer Lösung von Kalihydrat digerirt, hierauf Salzsäure in Ueberschuss zugegeben, und wenn die Flüssigkeit zu verdünnt erscheint, durch Verdünstung concentrirt. Leitet man nun einen Strom Schwefelwasserstoffgas durch, so wird der Arsenik als gelbes Sulphuret gefällt. Ist die Menge des Arseniks zu gering, so wird nur die Flüssigkeit gelb, ohne einen Niederschlag zu geben; lässt man sie verdunsten, so wird der Schwefelarsenik in dem Masse abgesetzt, als die Salzsäure an Concentration gewinnt. Man filtrirt den Niederschlag. Ist das übrige Sulphuret in zu geringer Menge da, als dass

man es vom Filtrum nehmen könnte, so gebe man einige Tropfen ätzenden Ammoniak zu, um es aufzulösen, leite die Flüssigkeit in ein Uhrglas und lasse sie verdunsten, wobei der Ammoniak sich verflüchtiget und den Schwefelarsenik zurücklässt.

Lässt sich dieser schwer sammeln, so gebe man in das Uhrglas ein wenig gepulvertes salpetersaures Kali, und mische mit dem Finger dieses Salz und das Sulphuret, damit es sich vom Glase los mache. Nun schmelze man in einer kleinen Phiole oder in einer Glasröhre, die an einem Ende verschlossen ist, ein wenig salpetersaures Kali mittelst einer Weingeistflamme, und gebe zu diesem, wenn es geschmolzen ist, etwas von der Mischung, die den Schwefelarsenik enthält. Er oxydirt sich mit Aufbrausen aber ohne Feuer und Detonation und ohne Verlust an Arsenik. Hierauf löse man dieses Salz in Wasser auf, gebe Kalk im Ueberschuss zu, und koche die Flüssigkeit. Dabei setzt sich der arseniksaure Kalk ab, und kann gesammelt werden. Wenn er trocken ist, mische man ihn mit Holzkohle, bringe ihn vor dem Löthrohre zum Rothglühen, und lasse eine kleine Quantität der Mischung in dem engen Theile obiger Röhre gelangen. Nun erhitze man den Theil der Röhre, welcher die Mischung enthält, stufenweise an der Flamme eines Löthrohres, um die Feuchtigkeit zu vertreiben; der Arsenik wird dann frei und in einiger Entfernung vom erhitzten Theil sublimirt. Ein Zusatz von verglaster Boraxsäure befördert die Zersetzung bei einer geringen Temperatur mächtig, allein sie enthält Wasser, und bringt in der geschmolzenen Masse ein Aufwallen hervor, wodurch sie in der Röhre aufsteigt, und ein Herausdrin-

gen der Dünste bewirkt, indem das Glas an der schwächeren Stelle durchbohrt wird.

Berzelius meinet, $\frac{1}{6}$ Gran Schwefelarsenik reiche zu drei Versuchen aus, aber er setzt hinzu, dass man Acht haben müsse, um nicht durch die Reagentien, besonders durch die Schwefel- und Salzsäure, Arsenik in die Mischung zu bringen. Erstere enthält ihn stets, wenn sie nicht aus vulcanischem Schwefel bereitet worden ist, und letztere bekommt ihn erst von der Schwefelsäure, die man zu ihrer Bereitung anwendet.

Wenn der Tod nicht durch Arsenik, sondern durch Arseniksäure verursacht worden ist, so muss man das Verfahren etwas abändern, weil das geschwefelte Wasserstoffgas die Arseniksäure zu leicht zersetzt. In diesem Falle muss man Schwefelwasserstoff-Ammoniak zusetzen, welches die Arseniksäure zu Schwefel-Arsenik reducirt, und dann diesen durch Salzsäure fällen.

4.

Hare's Chyometer.

(The Philos. magaz. and journ. April 1826.)

Den Lesern des zweiten Heftes dieser Zeitschrift ist bekannt, welche Verbesserung Hare in Pensylvanien an dem gewöhnlichen Eudiometer angebracht hat, indem er statt des gewöhnlichen Luftmasses einen hohlen Cylinder mit einem Kolben anbrachte, dessen Stange der Länge nach in 100 gleiche Theile getheilt ist, so dass man aus der Grösse des herausragenden Stückes der Kolbenstange die Capacität des

Cylinders vom offenen Ende bis zum Boden des Kolbens erkennen kann.

Eine solche Messröhre mit einem luftdicht anschliessenden Kolben und einer graduirten Kolbenstange braucht er auch, um das Verhältniss gewisser Wassermengen auszumitteln, die bei der Bestimmung des specifischen Gewichtes fester und tropfbar flüssiger Körper mittelst einer hydrostatischen Wage statt der gewöhnlichen Zuleggewichte angewendet werden sollen. Er nennt dieses Instrument Chyometer. Fig. 7 stellt es vor. Der grösseren Genauigkeit wegen befindet sich am Ende des Cylinders ein Einschnitt, an welchem ein Nonius angebracht ist, mittelst welchem jeder Grad der Kolbenstange in 10 gleiche Theile getheilt wird, so dass man $\frac{1}{1000}$ des innern Raumes messen kann.

Um das specifische Gewicht einer Flüssigkeit, welche das Material des Cylinders nicht angreift, zu bestimmen, nehme man zwei solche Chyometer, fülle eines derselben, indem man die Kolbenstange möglichst weit herauszieht, mit reinem Wasser, das andere mit der zu prüfenden Flüssigkeit, bringe alle 1000 Theile dieser Flüssigkeit auf eine Schale einer Wage und so viel Wasser auf die andere Schale, als zur Herstellung des Gleichgewichtes nöthig ist. Ersieht man z. B. aus der Scale am Kolben, dass man von letzterem 800 Theile gebraucht habe, so ist 0,800 das specifische Gewicht der Flüssigkeit, weil sich die specifischen Gewichte der Flüssigkeiten bei einerlei absolutem Gewichte verkehrt, wie ihre Volumnia verhalten.

Ist die abzuwägende Flüssigkeit von der Art, dass sie den Cylinder oder den Kolben des Chyometers an-

greift, so muss man ein anderes Verfahren wählen, um ihr specifisches Gewicht zu bestimmen. Man nimmt zu diesem Behufe einen Hilfskörper, z. B. einen Glastropfen, bringt ihn wie bei dem gewöhnlichen Verfahren an eine Wage und setzt ihn durch Gegengewichte ins Gleichgewicht. Hierauf taucht man ihn ganz in Wasser, und gibt mittelst des Chyometers auf die Schale, wo der Körpsr hängt, so viel Wasser, bis das vorige Gleichgewicht wieder hergestellt ist. Dann senkt man ihn in die zu prüfende Flüssigkeit und bringt das Gleichgewicht wieder durch Zugabe von Wasser hervor. Die letzte Wassermenge durch die erstere getheilt, gibt das specifische Gewicht der Flüssigkeit an. Ist die Theilung des Chyometers von der Art, dass man zur Einsenkung des Hilfskörpers in Wasser 1000 Theile Wasser braucht, so gibt die zweite Wassermenge das gesuchte specifische Gewicht ohne weitern an.

Will man mittelst des Chyometers das specifische Gewicht eines festen Körpers finden, so hänge man ihn unter die Schale einer Wage, und bringe in die Wagschale am entgegengesetzten Arme derselben so viel Wasser mittelst des Chyometers, bis das Gleichgewicht hergestellt ist. Hierauf setze man ein Gefäss mit Wasser unter den zu prüfenden Körper, tauche ihn darein, und stelle das Gleichgewicht wieder durch Wasser her, das man mittelst des Chyometers in die Wagschale ober dem abzuwägenden Körper gibt. Theilt man hierauf das Volumen des zuerst zugefüllten Wassers durch das des zuletzt beigegebenen, deren beide man aus dem Stande der Kolbenstange erkennt, so gibt der Quotient das gesuchte specifische Gewicht.

Es ist klar, dass sich dieses Verfahren von dem gewöhnlich angewendeten nur dadurch unterscheidet, dass man statt fester Gewichte Wasser anwendet.

Man kann auch das specifische Gewicht eines Minerals ohne alle Rechnung mittelst eines Chyometers finden, das eingerichtet ist, wie Fig. 8 zeigt. Dazu braucht man aber auch eine besondere Wage, die Fig. 9 darstellt.

Das Chyometer hat keine getheilte Kolbenstange, dafür aber zwei Weiser, deren einer am Ende des Cylinders befestiget ist, während sich der andere an der Kolbenstange verschieben lässt, aber auch mittelst einer Stellschraube eine unveränderliche Lage erhalten kann.

Der Balken der Wage hat auf einer Seite ein verschiebbares Gewicht W, um mit Körpern von verschiedenem Gewichte, die am anderen Arme angebracht werden, in ein Gleichgewicht gebracht werden zu können, der zweite Arm trägt an 2 Haken 2 Wasserbehälter, deren einer der Drehungsaxe fünfmal näher ist als der andere. Mittelst der Schraube S lässt sich der Balken immer so stellen, dass er mit dem Index I stets einerlei Richtung hat.

An das von der Axe des Wagebalkens entferntere Gefäss wird nun das Mineral angehängt, dessen specifisches Gewicht gesucht wird, und mittelst des beweglichen Gegenwichtes mit Beihülfe der Schraube S der Balken in die rechte Lage gebracht, dann ein Gefäss mit Wasser unter den Mineralkörper gestellt, derselbe darin getaucht, und aus dem Chyometer in das oberhalb befindliche Gefäss so viel Wasser gegeben, bis das Gleichgewicht neuerdings hergestellt ist. Da-

bei muss aber der Weiser B, welcher sich an der Kolbenstange verschieben lässt, mittelst der Stellschraube befestiget werden, damit man den Weg kennen lerne, welche der Kolben machen musste, um so viel Wasser herauszutreiben, als zur Einsenkung des Minerals nothwendig ist. Darauf entfernt man das Mineral von der Wage und mittelt aus, wie viele Wasserportionen von der Grösse der vorhin gegebenen zur Herstellung des Gleichgewichtes nothwendig sind. Diese Zahl um eine Einheit (d. i. um das Gewicht der vorhin zur Erzielung der Einsenkung zugegebenen Wassermasse) vermehrt, zeigt das gesuchte specifische Gewicht an, in so ferne es durch ganze Zahlen ausgedrückt werden kann. Die Bruchtheile kann man, wenn es nothwendig ist, dadurch bestimmen, dass man Wassermengen von der Grösse wie die vorhin angewandten Einheiten, in das zweite der Axe der Wage nähere Gefäss gibt; denn jede solche Wassermasse beträgt $\frac{1}{5}$ und kann zur ganzen Zahl addirt werden. Man theilt leicht den Abstand durch Augenmass in zwei gleiche Theile. Stellt man daher das Gefäss auf den Halbirungspunct, d. i. zehnmal näher an die Axe als das erstere, so erhält man für jedes Mass Wasser Zehnteltheile des specifischen Gewichtes.

Hare lehrt auch mittelst eines sogenannten Sectors das specifische eines Körpers bis auf kleine Bruchtheile zu finden, allein sein Verfahren ist so mühsam, dass jeder gewiss lieber die gewöhnliche Methode vorziehen wird, wenn es sich schon darum handelt, das specifische Gewicht bis auf mehrere Decimalstellen zu finden. (B)

5.

Eine einfache Methode gläserne Aräometer zu graduiren, von C. Moore.

(Annals of philosophy. April 1826.)

Man pflegt häufig gläserne Hydrometer von ungleichem Caliber durch Einsenken in Flüssigkeiten von verschiedenem specifischen Gewichte zu graduiren, aber man braucht dazu viele Flüssigkeiten, und diese ändern sich während ihrer Anwendung durch Verdünstung.

Untersucht man das specifische Gewicht der Flüssigkeiten mittelst eines Gefässes von bekanntem Volumen, so vergleicht man eigentlich die Gewichte gleicher Volumina mit einander; bedient man sich aber dazu eines Hydrometers, so vergleicht man die Volumina von einerlei Gewicht; denn das Instrument verdrängt ein Volumen der Flüssigkeit, dessen Gewicht dem eigenen gleich kommt. Hieraus nun leitet man eine Methode ab, ein Hydrometer mittelst einer einzigen Flüssigkeit zu graduiren.

Als solche dienet am besten Wasser, dessen specifisches Gewicht als Einheit angenommen wird, weil man leicht berechnen kann, welches Wasservolumen ein eben so grosses specif. Gewicht hat, wie ein bestimmtes Volumen einer Flüssigkeit von gegebenem specifischen Gewichte oder mit anderen Worten, um wie viel man das Gewicht des Hydrometers ändern muss, damit es im Wasser von 60° F. eben so weit einsinke, wie in einer Flüssigkeit von gegebenem specifischen Gewichte.

Gibt man in das Hydrometer eine papierene fein abgetheilte beliebige Scale, hängt es an eine Wage, wie einen festen Körper, dessen specifisches Gewicht hydrostatisch bestimmt werden soll, und bringt es durch Gegengewichte ins Gleichgewicht, setzt dann ein Gefäss mit Wasser darunter, nimmt von der Wagschale Gewichte weg, so wird sich das Hydrometer ins Wasser eintauchen, und zur Herstellung des Gleichgewichtes eine Wassermasse verdrängen, die so viel wiegt, als die weggenommenen Gewichte betragen. Auf diese Weise findet man leicht den Punct, bis zu welchem die Einsenkung in einer gegebenen Flüssigkeit erfolgen muss, den man hierauf in einer besonderen Scale verzeichnen, und in das Instrument gehörig einsetzen kann.

Gesetzt, es handelte sich darum, ein gläsernes Hydrometer für Säuren und Salzauflösungen zu verfertigen, bei welchem daher der Einsenkungspunct in reinem Wasser den obersten Platz einnimmt, und es verdränge das Instrument, wenn es bis zu diesem Puncte in Wasser getaucht wird, x Gran Wasser: so findet man das Gewicht, welches das Instrument haben muss, damit es sich in reines Wasser eben so weit eintaucht, wie bei dem Gewichte x in eine Flüssigkeit vom specifischen Gewichte y, durch die Proportion

$$y : 1 = x : \frac{x}{y}.$$

Vermehrt man daher das Gegengewicht um $x - \frac{x}{y}$, so wird das Instrumeut bis zum erforderlichen Puncte auftauchen. Hat man so alle nöthigen

Puncte bestimmt, so braucht man sie nur auf eine neue Scale zu verzeichnen, und diese an den gehörigen Platz zu bringen.

Soll ein Hydrometer für Flüssigkeiten eingerichtet werden, die leichter sind als Wasser, so entspricht der unterste Punct der Scale dem reinen Wasser, und man kann durch Verminderung der Gegengewichte wie vorhin, die übrigen Theilpuncte derselben finden.

Diese Methode ist, im Grunde genommen, dieselbe, welche Brisson in seinem Dictionaire de Physique Art. Areomètre angibt, und welche schon durch Gehlers Wörterbuch in Deutschland bekannt wurde, aber die Anwendung der Wage, wie sie Moore angibt, erleichtert die Ausführung derselben bedeutend, und dürfte daher deutschen Künstlern nicht unwillkommen seyn. (B)

6.

Neues Verfahren, das specifische Gewicht gepülverter Körper zu finden, von Leslie.

(Annals of Philosophy. April.)

Leslie bedient sich zur Bestimmung des specifischen Gewichtes gepulverter Körper, oder solcher, die man nicht in Wasser eintauchen kann, eines Instrumentes Fig. 10, das aus einer etwa 3 F. langen beiderseits offenen Röhre ae besteht. Der Theil ab hat 0,4 Z., der Theil be 0,2 Z. im Durchmesser. Beide Theile stehen mit einander bei b durch eine sehr feine Oeffnung in Communication, welche der Luft, aber nicht dem gepulverten Körper, den Durchgang gestattet. Der Rand a ist glatt geschliffen, und kann luftdicht mittelst einer Glasplatte geschlossen werden.

Die zu prüfende Substanz, z. B. Sand, wird in den weiteren Theil ab der Röhre gegeben, es ist aber gleichgültig, ob sie diese Röhre ganz oder nur zum Theil ausfüllt, die Röhre in verticaler Stellung in das offene mit Quecksilber gefüllte Gefäss x getaucht, bis das Quecksilber von innen und aussen nach b reicht, und die Oeffnung bei a luftdicht geschlossen. In diesem Zustande enthält ab keine andere Luft, als die, welche mit dem Sande vermengt ist. Steht nun z. B. das Barometer auf a Zoll, so hebt man das Instrument aus dem Quecksilber vertical heraus, bis inwendig nur die Säule $\frac{a}{2}$ über der Oberfläche der Flüssigkeit in x steht. Ihre Oberfläche entspreche dem Puncte c. Nun ist klar, dass die eingeschlossene Luft nur unter dem halben Luftdrucke steht, und daher einen zweimal grösseren Raum ausfüllt, und dass ab jetzt nur halb so viel Luft enthält, als vorher; die andere Hälfte derselben befindet sich in bc. Desshalb ist die Luftmenge in bc genau der gleich, welche mit dem Sande in ab gemengt war, und nimmt auch denselben Raum ein, den diese vor ihrer Dilatation einnahm. Man nehme nun den Sand heraus, wiederhohle denselben Versuch, aber mit dem Unterschiede, dass man den Raum ab ganz mit Luft gefüllt seyn lässt. Da nun jetzt die Luftmenge grösser ist, als beim vorigen Versuche, so wird sie auch, wenn man sie auf den halben Luftdruck bringt, einen grösseren Raum einnehmen, als vorhin, und das Quecksilber wird z. B. bis d reichen; dessen ungeachtet wird die verdünnte Luft in der engeren Röhre genau denselben Raum

einnehmen, den die von natürlicher Dichte unter dem ganzen Luftdrucke einnahm. Dieser Raum ist beim ersten Versuch bc, beim zweiten bd, woraus deutlich folgt, dass der Raum cd, als die Differenz beider, das Volumen der festen Masse des Sandes angibt. Erkennt man nun aus einer in be angebrachten Scale, wie viel Gran Wasser das Volumen cd hält, so kann man dieses Gewicht mit dem der festen Masse des Sandes vergleichen, und so des letzteren specifisches Gewicht finden. Dieses Verfahren ist nicht bloss sehr sinnreich, sondern gibt auch sehr wichtige Resultate bei seiner Anwendung. So bemerkt Leslie, dass einige Körper viele verdichtete Luft in ihren Zwischenräumen enthalten, und weil sie wahrscheinlich diese Eigenschaft in Pulverform in einem grossen Grade beibehalten, so begegnete er den hieraus entspringenden Fehlern dadurch, dass er die Dilatation der Luft unter einem verschiedenen Drucke, z. B. unter 10 Z., 20 Z. $7\frac{1}{2}$ zu 15 Z. mit einander verglich.

Kohle hat bekanntlich dieselbe chemische Natur wie der Diamant, und doch findet man ihr specifisches Gewicht gewöhnlich unter 0.5 angegeben. Leslie fand es in Pulverform von grösserem specifischen Gewichte als das des Diamanten ist. Mahagonyholz hat nach der gewöhnlichen Angabe ein specifisches Gewicht von 1.06; Leslie fand es durch sein Verfahren 1.68. Eben so fand er das specifische Gewicht des Weitzenmehles 1.56, des gestossenen Zuckers = 1.83, des Kochsalzes = 2.15. Stark zusammengerolltes Schreibpapier zeigt ein specif. Gewicht von 1.78, und nimmt daher weniger als $\frac{1}{3}$ des

Raumes ein, den es sonst einzunehmen scheint. Eine merkwürdige Thatsache ist die, dass vulkanischer Sand, eine scheinbar sehr leichte Substanz, ein specifisches Gewicht von 4.4 zeigt. Indess sind diese Zahlen blosse angenäherte Werthe, weil die Versuche noch nicht mit der gehörigen Genauigkeit und in hinreichender Anzahl angestellt werden konnten.

6.

Ueber die Anwendung des Heronsballs auf Kaffehmaschinen von Ph. Kulik, Professor der Physik in Grätz.

Dr. Rommershausen in Aken hat Dampfkaffehmaschinen in Vorschlag gebracht, die sich mir nun nach mehrjähriger Erfahrung als die zweckmässigsten bewähren. Sie haben im Wesentlichen die Einrichtung des Heronsballes, welche ich hier mit einigen Abänderungen mittheile, in der Ueberzeugung, den Liebhabern dieses allgemein beliebten Getränkes, einen Dienst zu erweisen. In der Figur 11 ist AA ein Gefäss von beliebiger Form und wie der ganze Apparat von gut verzinntem Eisen- oder Messingblech, welches an den Cylinder B, und dessen konische Fortsetzung C, luftdicht angelöthet ist: B und C sind von einander durch einen siebförmig durchbrochenen Boden DE getrennt, C mündet sich bis nahe am Boden des Gefässes A; FG ist eine kleine mit mehreren Löchern durchbrochene Röhre, an welche ein Sieb HH, das im Innern des Cylinders B hinauf und herabgeschoben werden kann, angelöthet ist, und welche durch einen starken Eisendraht IK von

etwa einer Linie im Durchmesser an den Cylinder befestiget werden kann; L ist ein gut sperrender Deckel, MM die Röhre, um den Kaffeh aus B in einen gläsernen in Messing gefassten Kolben N, der bei Oo mit einem Ring versehen ist, zu leiten. Die Röhre PP dient, um den Dampf aus AA in ein Gefäss R zu bringen, und wird mittelst des Hahnes Q luftdicht geschlossen. SS ist ein Dreifuss, auf dem das Gefäss aufgestellt wird, um es mittelst einer Weingeistlampe zu erwärmen.

Die Manipulation mit diesem Apparate ist sehr einfach: Hat man das Gefäss AA über dem Dreifuss aufgestellt, und den Hahn Q geöffnet, so giesse man in den Cylinder eine etwas grössere Menge heissen Wassers, oder Kaffehaussuds, als die Menge des zu bereitenden Kaffeh's ist, und schütte über den Boden DE die erforderliche Menge gemahlenen Kaffeh's (etwa $1\frac{1}{2}$ Kubikzoll zu einer Schale schwarzen, und 1 Kubikzoll zu einer Schale weissen Kaffeh's), stelle darauf das Sieb HH, mit einem darunter gelegten Filtrum von Fliesspapier, und befestige es, indem man durch eines der in der Röhre IG angebrachten Löcher und durch die Oeffnungen im Cylinder B, den Draht IK durchzieht: gut ist es, wenn dieser Draht an einem Ende mit einem Knopf, der die Oeffnung im Cylinder genau deckt, und an dem andern Ende mit einer Schraube versehen wird, um den inneren Raum von der umgebenden Luft genauer abzusperren. Nun zünde man die Lampe an, und wenn das Wasser im Gefässe zu sieden anfängt, sperre man den Hahn Q, setze den Deckel L auf, und bringe die Röhre MM in die Mündung des Kolbens; nach wenigen Minuten

wird man den klaren Kaffeh, mit allem ihm eigenthümlichen Aroma, sich in den Kolben ergiessen beobachten, nachdem nämlich der im obern Theile des Gefässes AA sich bildende Dampf durch den Druck auf das siedende Wasser solches durch die Röhre C zum aufgeschütteten Kaffeh, und von da durch das Filtrum bis zur Mündung der Röhre MM erhoben haben wird. Ist die beabsichtigte Menge Kaffeh's in N übergegangen, so kann man die Röhre PP in ein, kalten Rahm enthaltendes Gefäss R leiten, und nachdem der Hahn Q geöffnet worden ist, den gewaltsam ausströmenden Dampf benützen, um auch den Rahm zu erwärmen. Die Röhren MM und PP können aus zwei Stücken zusammengesetzt werden, welche etwa bei u in einander geschoben werden, das untere Stück über das obere, wodurch der ganze Apparat an Symmetrie gewinnen würde.

VII. Fortschritte der Physik in der neueren Zeit.

Entstehung der Klangfiguren.

Wiewohl die Anordnung des Sandes auf schwingenden Platten die ruhenden Stellen derselben von den bewegten zu unterscheiden lehret, so sind doch hiermit noch keineswegs alle Fragen beantwortet, die man sich nothwendiger Weise stellen muss, wenn man eine recht deutliche Vorstellung über den Verlauf der Sache bekommen soll. Von der Art ist die Frage, deren Beantwortung die französische Aka-

demie im Jahre 1809 zu einer Preisaufgabe machte, nämlich: Wie lassen sich aus den allgemeinen Gesetzen der Mechanik Gleichungen finden, durch welche die verschiedenen Bewegungen ausgedrückt werden, deren eine schwingende Fläche fähig ist, und bei denen jede Dimension auf eine andere Art gekrümmt wird? Vergebens verlängerte die Akademie die Zeit zur Bewerbung um diesen Preis zweimal, und als man nichts mehr erwarten zu dürfen glaubte, ertheilte man im Jahre 1816 den Preis der D. Sophie Germain, die eine richtige Differenzialgleichung, und übrigens noch einige neue Untersuchungen in einer Abhandlung einschickte. Wenn der Mathematiker die gerade genannte Frage sich stellen musste, so blieb dem Physiker noch übrig zu fragen, wie sich die Knotenlinien auf schwingenden Platten aus der Natur der schwingenden Bewegung ableiten, und von ihrem Entstehen an bis zu ihrer vollen Ausbildung Schritt für Schritt verfolgen lassen. Diese Frage haben die beiden Weber *) in ihrer Wellenlehre auf das genügendste beantwortet.

Sie lehrten zuerst bei jedem schwingenden Körper zwei Arten der Schwingungen kennen, nämlich die fortschreitende und die stehende. Bei ersterer pflanzt ein Körper den Schall durch seine Masse fort, ohne selbst zu schallen, bei letzterer tritt er selbst als schallender Körper auf, vorausgesetzt, dass die Schwingungen überhaupt mit einer Geschwindigkeit auf einander folgen, wie sie zur

*) Die Wellenlehre, und allgemeine musikalische Zeitung 1826. Nr. 12 – 14.

Erzeugung eines Schalles nothwendig ist. Es kommen aber auch beide Schwingungsarten bei nicht schallenden Schwingungen vor, ja man kann sie an Wasserwellen, an den Bewegungen eines gespannten hinreichend langen Seiles, das an einer Stelle eine Ausbeugung erlitten hat, mit Augen sehen, und so die Eigenthümlichkeit jeder dieser beiden Schwingungsarten am besten auffassen. Bei der fortschreitenden Schwingung oder Wellenbewegung lauft die an einem Orte entstandene Welle von Ort zu Ort fort, und lässt die Theile, an denen sie bereits vorübergegangen ist, ruhig zurück, wenn nicht durch eine fortgesetzte Wellenerregung eine ganze Reihe von Wellen auf einander folgt. Bei der stehenden Schwingung bleibt die Welle an ihrem Orte, und die ganze Bewegung besteht darin, dass eine Ausbeugung nach einer Richtung, z. B. nach aufwärts, in eine entgegengesetzte Richtung, nach abwärts, übergeht. Jede stehende Schwingung geht aus einer fortschreitenden hervor, wenn sich am schwingenden Körper gleich breite hin- und herlaufende Wellen auf eine regelmässige Weise begegnen An den Stellen, wo sich zwei, z. B. nach oben oder nach unten gerichtete gleiche Ausbeugungen begegnen, wird die Ausbeugung beim Durchkreuzen noch einmal so gross, wo aber eine nach oben gerichtete Ausbeugung eine nach unten gerichtete durchkreuzet, verschwinden beide während des Durchgehens, stellen sich aber nach der Durchkreuzung wieder her, und setzen ihren Weg nach der ihnen eigenthümlichen Richtung fort. Wird ein Körper von einer Reihe gleich breiter sich durchkreuzender Wellen einge-

nommen, so treffen sich an gewissen Stellen stets gleichartige Wellen, die abwechselnd aufwärts und abwärts gerichtete Ausbeugungen bilden, an anderen Stellen trifft aber eine aufwärts gerichtete, von einer Seite herkommende Ausbeugung mit einer abwärts gerichteten von der entgegengesetzten Seite kommenden zusammen, und beide bilden im Durchschnitte einen ruhenden Punct, d. i. einen Schwingungsknoten.

So ist der Hergang der Sache bei der Bildung der Schwingungsknoten, deren mehrere zusammenhängende eine Knotenlinie geben, überhaupt, die Natur des schwingenden Körpers mag wie immer beschaffen seyn. Es hat daher wenig Schwierigkeit, dieses auf schwingende elastische Platten anzuwenden. Hält man eine Glasplatte an einer Stelle und streicht sie an einer anderen mit einem Violinbogen, so ertheilt ihr dieser durch seine Bewegung Stösse, die sich in einem gewissen Tacte wiederhohlen, und in der Platte eine ihrer Elasticität und ihren Dimensionen entsprechende Schwingung hervorbringen. Diese Schwingungen wirken auf den Bogen zurück, und bestimmen so den Tact, in welchem er am angemessensten die Platte stosst. Jeder Stoss des Bogens erzeugt in der Platte eine Welle, deren Mittelpunct in der vom Bogen berührten Stelle liegt, diese Welle erweitert sich, bis sie die Ränder der Platte erreicht; dort wird sie zurückgeworfen, kehrt schnell zu dem Orte zurück, von wo sie ausging und erzeugt daselbst einen neuen Stoss auf den Bogen. Beim Zurückkehren trifft sie auf directe gleich lange Wellen, durchschneidet sie, verwandelt die fortschreitende Schwingung in eine stehende, und erzeugt so die

Knotenlinien, deren Inbegriff und relative Lage durch aufgestreuten Sand sichtbar wird, und Klangfigur heisst.

Bildung des Tartinischen dritten Tones.

Wenn zwei harmonirende Töne von gleicher Stärke einige Zeit anhalten, so hört man einen dritten tieferen mitklingen, der von einigen der Tartinische Ton genannt wird, dessen aber lange vor Tartini, Andreas Sorg, ein Deutscher, in seiner 1744 im Drucke erschienenen Anweisung zur Stimmung der Orgelwerke und des Clavier's gedenkt. Chladni erklärt diesen Ton aus dem in gleichen Zwischenzeiten erfolgenden Zusammentreffen der Schläge beider tönender Körper, wodurch eine Reihe von stärkeren Schlägen entsteht, die langsamer auf einander folgen, als die der zwei tönenden Körper, von denen er ausgeht, und die Empfindung eines tieferen Tones erzeugen. Purkinje*) sieht ihn als einen bloss subjectiven Ton an, weil er innerhalb der Sphäre des Gehörsinnes erzeugt wird, gleichwie es mit den Blendungsfarben etc. in Betreff des Gesichtssinnes der Fall ist. Um sich davon factisch zu überzeugen, räth er folgenden Versuch anzustellen: Man lasse zwei reine Diskantstimmen, am besten im grossen Terzintervall, laut anstimmen, bis man den dritten Ton deutlich vernimmt. Man entferne sich hierauf allmählig von den Singenden, stelle sich bald auf diese, bald auf jene Seite, horche bald mit diesem bald mit jenem Ohr und versuche den Ort anzugeben, von dem der dritte Ton kommt. Man wird ihn keineswegs so an-

*) Kastners Archiv. 1826. Heft 1. S. 39.

geben können, wie man es bei Tönen im Stande ist, welche einen objectiven Ursprung haben; bei mehr Fertigkeit wird man sich von diesem Tone überall verfolgt glauben und so deutlich wahrnehmen, dass sein Ursprung im Gehörorgane selbst zu suchen sey, was auch die eigene betäubende Empfindung und die Eingenommenheit des Kopfes bestätiget, welche ihn zu begleiten pflegt.

Neue Gesetze der Vibrationen der Luft und Verbesserung der Orgelpfeifen.

Man wusste seit Dan. Bernouilli's gelehrten Untersuchungen über die Töne der Orgelpfeifen, welche in den Memoires de l'Acad. de Paris 1762 enthalten sind, dass die Anzahl der Schwingungen einer Luftsäule verkehrt der Länge dieser Säule proportionirt sey, wenn diese der ganzen Oeffnung nach erschüttert wird, und dass die Anzahl der Schwingungen geringer ist als dieses Gesetz angibt, wenn die Erschütterung nur an einem Theile der Oeffnung der Pfeife Statt findet. Allein man kannte die Gesetze der Schwingungen einer Luftsäule, die sich in einem solchen Falle befindet, nicht, bis Savart *), dem die Akustik schon früher so viel verdankte, sie auf experimentellem Wege darstellte und dadurch die Möglichkeit begründete, beim Baue der Orgelpfeifen nach Grundsätzen zu verfahren, während man bis jetzt hierin fast ganz dem Zufalle Preis gegeben war. Er zeigt, dass in jedem Falle, wo eine Luftmasse nur partiell erschüttert wird, die Phänomene, die daraus hervor-

*) Annales de Chimie et de Physique. tom. 29. p. 404.

gehen, von der Grösse und der Lage des Mundloches, und vom Volumen und der Gestalt der Luftsäule abhängen, ohne dass die ursprüngliche Richtung des Luftstromes, durch welchen die Erschütterung erfolgt, einen merklichen Einfluss darauf ausübte. Ferner fand er, dass das für Pfeifen von ähnlicher Gestalt gültige Gesetz: die Anzahl der Luftschwingungen ist den linearen Dimensionen der Pfeifen proportionirt; dann das für sehr enge Pfeifen aufgestellte Gesetz, wo die Luft in der ganzen Oeffnung erschüttert ist: die Anzahl der Schwingungen verhält sich, wie verkehrt die Länge der Pfeife; endlich das für eine Luftmasse, die aus dünnen auf einerlei Weise erschütterten Schichten besteht, bestätigte: die Schwingungen verhalten sich verkehrt, wie die Quadratwurzeln der Oberfläche der schwingenden Masse, dass alle diese Gesetze nur besondere Fälle eines allgemeinen Ausdruckes sind, nach dem man die Anzahl der Schwingungen einer Luftmasse von was immer für Dimensionen, die wie immer erschüttert wird, bestimmen kann. Die Mündung lässt sich nach Savart als der Ort betrachten, von wo eine unendliche Anzahl von Luftwellen ausgeht, die sich in der übrigen Masse wie in freier Luft ausbreiten, von den Wänden reflectirt werden und durch ihr Zusammentreffen mit den directen Wellen Knotenflächen erzeugen, deren Gestalt von der Form und den Dimensionen der Pfeife, und bei derselben Pfeife von der Grösse und Lage der Mündung abhängt. Soll die Stärke der Töne bedeutend seyn, so muss die Länge der ursprünglichen Luftwellen den Dimensionen der Pfeife angemessen seyn. Man sieht hieraus, wie homogen die Ansich-

ten Savarts und die der Verfasser der Wellenlehre über das Entstehen der Schwingungsknoten sind. Das Eigenthümliche des ersteren liegt nur darin, dass er bei schallenden Luftsäulen Knotenflächen nachweiset, welche auf der Mündung senkrecht stehen, und wodurch die schwingende Luftäule, selbst in prismatischen Pfeifen, durch einen elliptischen Cylinder begränzt wird. Savart leitete von diesen Gesetzen sehr interessante Regeln zur Verbesserung im Baue der Orgelpfeifen ab. Diese sind im Wesentlichen folgende:

1. Man soll lauter Orgelpfeifen von ähnlicher Gestalt anwenden, damit, wenn man einmal eine Form derselben gefunden hat, die irgend einen Ton am vollkommensten gibt, man die andern nach dem Gesetze, dass sich die Anzahl der Schwingungen verkehrt wie die linearen Dimensionen verhalten, vergrössert oder verkleinert darstellen könnte.

2. Kubische Pfeifen geben die reinsten und ganz eigenthümlich klingende Töne, sprechen ungemein leicht an und nehmen sehr wenig Platz ein. Ein Würfel von 53 — 54 Linien nach einer Dimension kann eine gewöhnliche Orgelpfeife von 10 — 11 Zoll Länge und 2 — $2\frac{1}{2}$ Z. an jeder Seite ersetzen.

3. Man könnte zur Raumersparung auch von dem Satze Gewinn ziehen, dass man an einer prismatischen Pfeife mit quadratförmiger Basis, letztere ohne Aenderung des Tones vermindern kann.

4. Es wäre vielleicht vortheilhaft die Mündung in der Mitte der Seitenwand anbringen. Man erlangt dadurch einen sehr angenehmen Ton.

5. Kurze Pfeifen, bei denen die einzelnen auf

der Mündung senkrechten Luftschichten nicht einerlei Bewegung haben, scheinen keine angenehmen Töne geben zu können. Von der Art sind sphärische Pfeifen und auch kubische, an denen die Mündung in der Mitte einer ihrer Seiten angebracht ist.

6. Bei krummen Pfeifen hat das Material derselben und die Dicke der Wände einen grossen Einfluss auf die Beschaffenheit und Höhe des Tones.

Nutzen des Trommelfells und des äusseren Ohres:

Es sind zwar über die Functionen der einzelnen Theile des Gehörorganes viele Hypothesen aufgestellt worden, keine aber hat man auf experimentellem Wege näher geprüft, bis Savart *) durch directe Versuche zeigte, wie sich die Bewegung eines in der Luft vibrirenden Körpers den verschiedenen Theilen des Gehörorganes, die mit der Luft in Berührung stehen, mittheilen kann. Um diese Versuche entscheidend einzurichten, musste er zuerst die Art untersuchen, wie sich der Schall durch die Luft einem Körper mittheilt, und zu diesem Behufe Körper wählen, welche dem Gehörorgane möglichst ähnlich waren, aber doch, da sie von beliebiger Grösse gewählt werden konnten, die Art der Schwingung, in die sie geriethen, genauer zu erkennen gaben, als es die Theile des Gehörorganes bei ihrer stets nur geringen Ausdehnung gestatten können. Von der Art sind Scheibchen aus Papier, die an ihrem Umfange auf einen Ring gespannt, in eine horizontale Rich-

*) Annales de Chimie et de Physique 1824. tom. 26. p. 5'e.'s.

tung gebracht, und mit feinem Sande bestreut wurden. Brachte man eine tönende Glasscheibe, deren Ebene mit der des Plättchens parallel gehalten wurde, in seine Nähe, so theilte sich ihm mittelst der Luft die Bewegung der ersteren mit, und man konnte sie aus dem Aufhüpfen des Sandes erkennen und sehen, dass diese Mittheilung durch die Luft gerade so vor sich geht, als wenn beide Scheiben mittelst eines Glasstabes mit einander verbunden wären. Jeder Neigung und Lage beider Körper gegen einander entsprach eigene Bewegung im Papiere, aber immer erfolgten die mitgetheilten Vibrationen nach derselben Richtung, wie die des ursprünglich vibrirenden Körpers, mithin so, als wenn beide vibrirende Körper statt durch eine Luftsäule durch einen festen Körper in Verbindung stünden. Die Entfernung beider Körper von einander, bei der die Mittheilung noch Statt findet, richtet sich nach der Dicke und Spannung der Membrane, die man zum Versuch braucht. Ist diese sehr dünn, so findet selbst bei einer Entfernung von mehreren Metern noch eine Mittheilung Statt. Man kann auch ohne Aenderung des Erfolges statt der Glasscheibe eine tönende Orgelpfeife anwenden.

Aendert sich während der Communication der Bewegung die Spannung des Häutchens, welches bei Papier durch seine hygroscopische Eigenschaft sehr leicht bewirkt wird, so erleiden auch die Klangfiguren auf demselben eine Aenderung, wenn auch die des mittheilenden Körpers unverändert bleiben; bei einerlei Spannung bleibt dieselbe Figur. Wird das Häutchen angefeuchtet, oder mit Oehl getränkt, so bleiben alle Gesetze der Mittheilung unverändert die-

selben, ja man bemerkt, dass sich in diesem Falle die Abtheilung in Parthien, welche durch kreisförmige Knotenlinien von einander getrennt sind, mit einer ganz besonderen Reinheit und Leichtigkeit herstellt. Desshalb sind auch Membrane, die erst durch eine künstliche Spannung elastisch werden, viel empfindlicher für die mitgetheilten Vibrationen, als solche, die von Natur aus schon elastisch sind, und dazu keiner Spannung bedürfen.

Nachdem Savart auf diese Weise die Gesetze ins Klare gebracht hatte, nach welchen die Mittheilung einer schwingenden Bewegung mittelst der Luft geschieht, untersuchte er die Functionen der einzelnen wichtigeren Theile des Gehörorganes. Er brachte an einem Kopfe mittelst einer Säge einen Schnitt parallel mit dem Trommelfell an, damit dasselbe blos gelegt ward, liess es in der Luft so lange austrocknen, bis er nicht mehr befürchten durfte, dass feiner, darauf gestreuter Sand adhärire, bestreute es dann mit Sand, hielt eine tönende Platte in die Nähe, und beobachtete die Bewegung desselben. Wurde die Trommelhöhle geöffnet, um die Muskeln beobachten zu können, die an den Gehörknöchelchen angeheftet sind, so fand man, dass das Trommelfell schwerer in Bewegung versetzt werden kann, sobald es gespannt ist, so, dass man annehmen muss, der Nutzen der Muskel, welche diese Spannung bewirkt, bestehe darin, das Organ gegen zu starke Eindrücke zu schützen.

Der Ohrmuschel hatte man lange die Function angewiesen, die Schallwellen, welche am Ohre anlangen, zu concentriren, und auf diese Weise den

Schall zu verstärken; Savart hat aber durch directe Versuche dargethan, dass sie ausser diesem noch zu einem anderen Zwecke diene: dass sie nämlich selbst in Schwingung gerathe, dadurch die Schwingungen der Trommelhaut unterstütze und insbesondere den ankommenden Schallwellen, sie mögen was immer für eine Neigung gegen die Trommelhaut haben, immer eine bestimmte Fläche darbiete, deren Richtung mit der Richtung der Theile der Welle normal ist, und die Intensität des Schalles von der Neigung der ankommenden Wellen gegen das Ohr unabhängig mache.

Auf die Natur der Schwingungen der Trommelhaut hat nach S. der Stiel des Hammers einen grossen Einfluss; denn dieser ist an der inneren Fläche der Trommelhaut von einem Puncte ihres Umfanges bis zur Mitte befestiget. Auch diesen Umstand hat er durch Experimente heraus gehoben, und gezeigt, dass der Hammer eine zweifache Verrichtung habe: 1) mittelst der ihm eigenen Muskel die Spannung der Trommelhaut zu ändern, sie gegen zu starke Eindrücke zu schützen, und für schwache empfänglich zu machen; 2) an der Bewegung der Trommelhaut Theil zu nehmen, und sie zu anderen Theilen fortzupflanzen; denn da dieser Knochen mit dem Ambos in unmittelbarer Berührung steht, dieser mit dem rundlichen Beine des Sylvius, und durch dieses mit dem Steigbügel communicirt, so ist es klar, dass sich jede Bewegung der Trommelhaut dem ovalen Fenster ohne die mindeste Aenderung in der Periode der Oscillationen mittheilen wird.

Auf die Frage, warum geschehen denn die Schall-

eindrücke nicht unmittelbar auf die Häute, welche die Oeffnungen des Labyrinthes schliessen, und wozu dienet denn die Trommelhaut und die Trommelhöhle? antwortete S.: Die Trommelhaut verwehrt der äusseren Luft den Eintritt in das Ohr, und die Trommelhöhle bildet ein Behältniss für die Luft, welche durch die Eustachische Trompete aus dem Munde kommt, so dass sich in ihm eine Art Atmosphäre von beständiger Temperatur bildet. Dadurch wird bewirkt, dass die Theile des Ohres ungeachtet der Aenderungen der äusseren Temperatur stets dieselbe Elasticität beibehalten, und das Ohr schon einmal wahrgenommene Töne wieder erkennen kann, welches nicht der Fall wäre, wenn dieselben Oscillationen bei verschiedener Temperatur und daher bei verschiedener Elasticität der einzelnen Theile erfolgten.

Fortpflanzung der vibrirenden Bewegung in tropfbaren Flüssigkeiten.

Seit man über die innere Beschaffenheit des Gehörorganes Kenntniss hat, weiss man, dass einige Theile desselben sich ganz in tropfbaren Flüssigkeiten befinden, andere mit solchen in unmittelbarer Berührung stehen, und dass die Fortpflanzung des Schalles im Ohre bis zum Gehörnerve auf den Gesetzen beruht, nach welchen sich die vibrirende Bewegung den Flüssigkeiten mittheilt. Seit geraumer Zeit ist man darüber im Klaren, dass diese Fortpflanzung durch tropfbare Flüssigkeiten so vor sich gehen kann, wie durch einen anderen Körper; es fehlte nur noch, dass durch Versuche ausgemittelt werde, nach welcher Richtung sich die Theile einer

Flüssigkeit bewegen, die mit einem vibrirenden Körper in unmittelbarer Verbindung steht. Auch diese Arbeit hat Savart *) unternommen und gezeigt, dass sich die Theile einer Flüssigkeit, die einerseits mit einem vibrirenden Körper in unmittelbarer Berührung stehen, nach einer Richtung bewegen, welche mit der jenes Körpers parallel ist, und dass durch die Flüssigkeit ein anderer damit communicirender Körper selbst nach demselben Gesetze in Vibrationen versetzt werden kann, es mag letzterer in die Flüssigkeit zum Theile oder ganz eingetaucht seyn. Man kann nun mit Zuversicht behaupten, dass die Mittheilung der vibrirenden Bewegung unter Körpern von was immer für einem Aggregationszustande nach demselben Gesetze vor sich geht. Als den allgemeinsten Ausdruck dieses Gesetzes gibt Savart an: Wenn in einem Systeme von Körpern einzelne Theile erschüttert werden, und sich desshalb nach einer bestimmten Richtung bewegen müssen, so gerathen alle Theile dieses Systemes in Schwingungen nach Richtungen, die unter sich und mit der des ursprünglich vibrirenden Theils parallel sind.

Es ist nun leicht, nach diesem Gesetze den Verlauf der Sache bei der Fortpflanzung des Schalles im Ohre zu begreifen. Enthält nämlich das Labyrinth eine Flüssigkeit, wie sie die meisten Anatomen annehmen, so muss sie die Bewegung den sie umgebenden Theilen mittheilen, ohne ihre Richtung und die Anzahl der Schwingungen zu ändern.

*) Annales de Chimie etc. Mars, 1826. p. 283 et seq.

MATHEMATISCHE ABTHEILUNG.

I. Elementarischer Beweis der Formel für die Schwingungszeit des einfachen Pendels. Von Dr. Jak. Phil. Kulik, Professor der Physik in Grätz.

Die Formel für die Schwingungszeit eines einfachen Pendels gehört unstreitig unter die wichtigsten Sätze der Physik und der angewandten Mathematik: sie wird gewöhnlich mittelst der Differential- und Integralrechnung bewiesen, noch öfters aber in solchen Lehrbüchern, welche die sogenannte höhere Mathematik nicht voraussetzen mögen, ohne allen Beweis aufgeführet. Da nun der Unterricht über die höhere Mathematik in den österreichischeu Staaten blos an dem polytechnischen Institute zu Wien, und an den Universitäten zu Wien, Prag, Ofen, Padua und Pavia ertheilt wird, und sonach die Zahl der mathematischen Leser, denen jener Beweis unverständlich ist, ziemlich gross seyn dürfte; so schien es mir der Mühe werth, über einen aus den Elementen der Mathematik geschöpften Beweis dieses Satzes um so mehr nachzudenken, als mir nicht bekannt ist, dass ihn Jemand auf diesem Wege verfolgt und aufgestellt hätte.

Bekanntlich erhält ein Körper durch die Bewegung auf der schiefen Ebene dieselbe Geschwindig-

keit, welche er im freien Fall durch die Höhe der schiefen Ebene erlangt haben würde; dass dieser Satz auch für die Bewegung eines Körpers auf einer krummen Linie gilt, wird gewöhnlich stillschweigend angenommen, welches sich jedoch leicht beweisen lässt. Es sey AQB (Fig. 12) eine in einer verticalen Ebene liegende krumme Linie, und die Tangenten ihrer Endpuncte AC, BC mögen den Winkel BCD $=$ a einschliessen; man theile ihn durch fortgesetzte Halbirungen in eine beliebige Anzahl n gleicher Theile, durch die geraden Linien CE, CF, CG . . . u. s. f., und ziehe die mit ihnen parallelen Tangenten HI, KL, MN an die krumme Linie, welche ein um dieselbe beschriebenes, und zwar gleichwinkeliges Vieleck AMNLIB bilden werden, weil die Seiten des Vieleckes den die gleichen Winkel DCG, GCF, FCE, ECI einschliessenden geraden Linien parallel sind, und sonach AMM' $=$ DCG, MNK $=$ GCF u. s. f., mithin jeder derselben $= \frac{1}{n}a$ ist. Gesetzt ein schwerer Körper würde durch einen nach dem Vieleck MNLI geformten Canal sich selbst überlassen, so müsste er, die Hindernisse der Bewegung bei Seite gesetzt, bei der Bewegung durch MN dieselbe Geschwindigkeit erlangen, als im freien Fall durch MO, wenn MH vertical, und NO durch N horizontal gezogen ist, und die Zunahme der Geschwindigkeit bei der Bewegung durch NL würde dieselbe seyn, wie im freien Fall durch OH, wenn LH eine durch L gezogene horizontale vorstellt. Da derselbe Schluss bei den folgenden Ecken L, I u. s. f. gilt: so ist klar, dass, wofern er beim Uebergang aus einer Ebene in die

nächstfolgende durch den schiefen Stoss keinen Verlust an Geschwindigkeit erleidet, der obige Satz auch für die Bewegung eines schweren Körpers in einem nach einem Vieleck gebrochenen Canal gelten muss.

Um nun die Zulässigkeit der eben erwähnten Bedingung zu prüfen, sei NP = c die Geschwindigkeit des bei N ankommenden Körpers, man zerlege sie, indem man das Rechteck NQPR verzeichnet, dessen Diagonale NP ist, in die Geschwindigkeiten NQ und PQ, jene nach der Richtung der Bewegung, diese darauf senkrecht; so ist

$NQ = PN.\cos.PNQ = c.\cos\frac{1}{n}a$ die Geschwindigkeit

des Körpers nach der veränderten Richtung NL, mithin der Geschwindigkeitsverlust an dem Ecke N gleich

$$c - c.\cos\frac{1}{n}a = c\left(1 - \cos\frac{1}{n}a\right) = 2c.\sin^2\frac{1}{n}a$$

welcher für den Fall, dass n sehr gross ist, oder der vieleckig gebrochene in einen stetig gekrümmten Canal übergeht, verschwindet; es ist sonach bei der Bewegung eines schweren Körpers auf einer krummen Linie jener Geschwindigkeitsverlust Null, und die zu Ende der Bewegung vom Körper erlangte Geschwindigkeit dieselbe, wie im freien Falle durch die Höhe der krummen Linie.

Wenn ein Pendel AB (Fig. 13) um den Bogen CB = a von der verticalen Lage abgelenkt wird, so sei CD = g die Beschleunigung der Schwere, und es werde diese durch Construction des Kräfteparallelogramms CEDF in die Kräfte CF, CE zerfällt, deren jene durch die Festigkeit des Fadens aufgehoben wird, diese aber auf jener senkrecht ist, und die

bewegende Kraft vorstellt, mit welcher das Pendel zur verticalen Lage getrieben wird; sie ist offenbar gleich CD.sin.CDE = CD.sin FCD = g.sin a. Da die Festigkeit des Fadens den Punct C verhindert, von dem kreisförmigen Wege abzuweichen; so ist die Bewegung des Pendels so beschaffen, wie die eines schweren Körpers auf einem kreisförmig gebogenen Canale: sonach muss die Geschwindigkeit des in der verticalen Lage anlangenden Pendels gleich seyn jener eines schweren durch die Höhe GB frei fallenden Körpers, mithin gleich seyn

$\sqrt{2g.GB} = \sqrt{2g(AB - AG)} = \sqrt{2gl(1 - \cos a)} = c$,

wenn man mit l die Pendellänge bezeichnet.

Um noch die Geschwindigkeit v zu bestimmen, welche ein Pendel in jedem anderen Puncte E seiner Bahn erhält, sey CE der zurückgelegte Bogen = n, mithin EB = a — n; so ist nach dem Vorhergehenden $v = \sqrt{2g.GH} = \sqrt{2g(BG - GH)}$, und weil $GB = l(1 - \cos a)$, $GH = l(1 - \cos(a - n))$ ist, wird $v = \sqrt{2gl[\cos(a-n) - \cos a]}$.

Da die Schwingungen des Pendels, welche in kleinen Bogen vor sich gehen, gerade die merkwürdigsten sind; so können die Formeln für c und v dadurch auf eine einfachere Form gebracht werden, dass man für die Sinus der Bogen, die Bogen selbst setzet: nun ist $1 - \cos a = 2\sin^2 \frac{1}{2} a$, und wenn a ein Bogen von ein Paar Graden ist, ohne merklichen Fehler $2\sin^2 \frac{1}{2} a = 2(\frac{1}{2} a)^2 = \frac{1}{2} a^2$; ferner hat man *)

---

*) Es ist nämlich $\cos(s + d) = \cos s.\cos d - \sin s.\sin d$, und
$\cos(s - d) = \cos s.\cos d + \sin s.\sin d$, daher
$\cos(s - d) - \cos(s + d) = 2\sin s.\sin d$ setzt man $s + d = a$, und $s - d = a - n$, so wird $s = \frac{1}{2}(2a - n)$, und $d = \frac{1}{2} n$, woraus der obige Ausdruck folgt.

$\cos(a-n) - \cos a = 2 \sin\frac{1}{2}(2a-n) \sin\frac{1}{2} n$, und wenn a ein kleiner Bogen ist, wird

$\cos(a-n) - \cos a = \frac{1}{2}(2a-n)n$. Setzt man nun diese Werthe in den Formeln für c und v, so erhält man $c = a\sqrt{gl}$, und $v = \sqrt{gl\,(2a-n)\,n}$. Die Kraft $g \sin a$, welche die Bewegung des Pendels hervorbringt, ist veränderlich, und nimmt mit dem Elongationswinkel desselben ab: um die Dauer einer solchen Bewegung, um die es sich hier eigentlich handelt, zu finden, ist es vortheilhaft, sie mit der gleichförmigen Bewegung eines andern Körpers zu vergleichen, welche in derselben Zeit und mit einer bekannten Geschwindigkeit vor sich geht, wozu sich die Kreisbewegung als die einfachste am besten eignet. Man nehme den Elongationsbogen al zum Halbmesser, und beschreibe mit $IK = al$ (Fig. 14) den Kreis IMN, schneide IK in L so, dass sich verhält $IK : IL = a : n$, und ziehe die Ordinate $LM = \sqrt{IL.LN} = \sqrt{l\,(2a-n)\,n}$. Während das Pendel durch den kleinen Bogen IKN schwingt, bewege sich ein anderer Körper durch den Umfang des Kreises gleichförmig, mit einer Geschwindigkeit, welche nach der Richtung der Tangente gleich $MT = a\sqrt{gl}$ sey. Zerlegt man diese in MP und PT, so ist MP die Geschwindigkeit desselben nach einer zum Durchmesser des Kreises parallelen Richtung, und da

$$\left.\begin{matrix}MK\\ al\end{matrix}\right\} : \left.\begin{matrix}ML\\ \sqrt{l\,(2a-n)\,n}\end{matrix}\right\} = \left.\begin{matrix}MT\\ a\sqrt{gl}\end{matrix}\right\} : MP \text{ ist,}$$

wird $$MP = \sqrt{gl\,(2a-n)\,n} = v$$

es erhält sonach der andere sich gleichförmig bewegende Körper in irgend einem Puncte seiner Bahn nach einer zum Durchmesser des Kreises parallelen

Richtung dieselbe Geschwindigkeit, als das Pendel in jenem Puncte hat, der mit dem ersteren auf derselben Ordinate des Kreises sich befindet; wenn also derselbe und das Pendel ihre Bewegung in I gleichzeitig beginnen, so werden sie beständig auf einer und derselben Ordinate des Kreises, wie ML, einander begleiten, und mithin gleichzeitig in N anlangen, nachdem jener den Umfang des Halbkreises, dieser aber den Durchmesser desselben zurückgelegt hat: man erhält aber die Zeit des gleichförmigen Umlaufes des ersteren im Halbkreise, indem man den zurückgelegten Weg mit der Geschwindigkeit dividirt, mithin $= \frac{\pi . IK}{c} = \frac{\pi a l}{\pi \sqrt{gl}} = \pi \sqrt{\frac{l}{g}}$, welches sonach die Schwingungsdauer eines einfachen Pendels ist.

II. Ueber einen neuen, der Infinitesimal-Rechnung analogen Calcul.

(Exercices de Mathematiques par M. Augustin-Louis Cauchy. Paris 1826. pag. 11 etc.)

Die Differenzial-Rechnung, welcher die Analysis so viel verdankt, gründet sich bekanntlich auf die Betrachtung der Differenzial-Coefficienten oder der abgeleiteten Functionen. Wächst eine unabhängige veränderliche Grösse x um eine unendlich kleine Differenz ε, so erleidet eine Function $f(x)$ dieser Veränderlichen im Allgemeinen ebenfalls eine unendlich kleine Aenderung, deren erstes Glied der Differenz ε proportionirt ist, und durch ε getheilt, den sogenann-

ten Differenzial-Coefficienten darbietet. Dieser Coefficient besteht für jeden Werth von x, und verschwindet nur in dem Falle fortwährend, wenn die vorgelegte Function sich auf eine beständige Grösse reducirt. Eine ganz andere Bewandniss hat es mit dem Coefficienten, von welchem hier die Rede seyn wird; er ist im Allgemeinen = o und tritt nur für besondere Werthe der veränderlichen Grösse x auf. Kennt man die Werthe von x, für welche $f(x)$ unendlich gross wird, und setzt man einem derselben z. B. x_1 die unendlich kleine Aenderung ε zu, so enthalten die ersten Glieder der nach den steigenden Potenzen von ε geordneten Entwickelung der Function $f(x_1+\varepsilon)$ offenbar diese Aenderung mit negativen Exponenten, und eines dieser Glieder ist das Product von $\frac{1}{\varepsilon}$ mit einem endlichen Coefficienten, welchen wir den auf den besonderen Werth x_1 sich beziehenden Rest (résidu) der Function $f(x)$ nennen wollen.

Die Reste dieser Gattung stellen sich in mehreren Zweigen der Analysis ungezwungen dar. Ihre Betrachtung verschafft uns einfache, leichte, auf eine grosse Menge mannigfaltiger Aufgaben anwendbare Methoden, und neue, der Aufmerksamkeit der Geometer nicht unwürdige Formeln. So führt der Calçul mit diesen Resten zu der Interpolations-Formel von Lagrange; zur Zerlegung rationaler Brüche, ihre Nenner mögen gleiche oder durchgehends verschiedene Wurzeln besitzen; zu allgemeinen Formeln für die Ausmittelung der Werthe der innerhalb bestimmter Grenzen genommenen Integrale; zur Summirung einer Menge von Reihen und insbesondere solcher,

deren Glieder mit periodischen Grössen verknüpft sind; zur Integration der mit beständigen Coefficienten versehenen linearen Gleichungen mit endlichen oder unendlich kleinen Differenzen und mit oder ohne einem veränderlichen Endgliede, zur Reihe von Lagrange und anderen derselben Gattung, zur Auflösung der algebraischen oder transcendenten Gleichungen u. d. gl.

Die Aufsuchung der Reste der Functionen unterliegt gewöhnlich keinen Schwierigkeiten. Es sey nämlich, wie oben x_1 einer der Werthe von x, für welche $f(x)$ unendlich wird, d. h. eine der Wurzeln der Gleichung

$$(1) \qquad \frac{1}{f(x)} = 0.$$

Der Werth des Productes $(x - x_1)f(x)$ für $x = x_1$ nimmt eine unbestimmte Form an, in der That aber ist er meistens eine endliche Grösse. Unter dieser Voraussetzung sey

$$(2) \qquad (x - x_1)f(x) = \mathrm{f}(x)$$

so folgt hieraus

$$(3) \qquad f(x) = \frac{\mathrm{f}(x)}{x - x_1}$$

und

$$(4) \quad f(x_1 + \varepsilon) = \frac{\mathrm{f}(x_1 + \varepsilon)}{\varepsilon} = \frac{1}{\varepsilon}\mathrm{f}(x_1) + \mathrm{f}'(x_1 + \Theta\varepsilon)$$

wobei f′ die abgeleitete Function der mit f bezeichneten andeutet und Θ eine die Einheit nicht erreichende Zahl vorstellt. Es ist demnach

$$(5) \qquad \mathrm{f}(x_1)$$

oder mit anderen Worten der Werth des Productes

$$(6) \qquad \varepsilon f(x_1 + \varepsilon) \text{ für } \varepsilon = 0$$

der sich auf die Annahme $x = x_1$ beziehende Rest der Function $f(x)$. Wir haben hier stillschweigend vorausgesetzt, dass die Gleichung (1) bloss eine der Grösse x_1 gleiche Wurzel zulässt.

Man sagt der Gleichung (1) gehöre die Wurzel x_1 m mal, wenn das Product $(x - x_1)^m f(x)$ für $x = x_1$ einen endlichen von der Nulle verschiedenen Werth erhält. Es sey unter dieser letzteren Voraussetzung

$$(7) \qquad (x - x_1)^m f(x) = \mathrm{f}(x)$$

so wird $\mathrm{f}(x_1)$ eine endliche Grösse, und man hat

$$(8) \qquad f(x) = \frac{\mathrm{f}(x)}{(x - x_1)^m}$$

woraus sich, wenn man $x = x_1 + \varepsilon$ seyn lässt, und $\Theta < 1$ ist,

$$(9) \qquad f(x_1 + \varepsilon) = \frac{\mathrm{f}(x_1 + \varepsilon)}{\varepsilon^m}$$

$$= \frac{1}{\varepsilon^m}\mathrm{f}(x_1) + \frac{1}{\varepsilon^{m-1}}\frac{\mathrm{f}'(x_1)}{1} + \frac{1}{\varepsilon^{m-2}}\frac{\mathrm{f}''(x_1)}{1.2} + \ldots$$

$$\ldots + \frac{1}{\varepsilon}\cdot\frac{\mathrm{f}^{(m-1)}(x_1)}{1.2.3\ldots(m-1)} + \frac{\mathrm{f}^{(m)}(x_1 + \Theta\varepsilon)}{1.2.3\ldots m}$$

ergibt. Die endliche Grösse

$$(10) \qquad \frac{\mathrm{f}^{m-1}(x_1)}{1.2.3\ldots(m-1)}$$

oder mit anderen Worten, den Werth des Ausdruckes

$$(11) \qquad \frac{1}{1.2.3\ldots(m-1)}\,\frac{d^{m-1}[\varepsilon^m f(x_1 + \varepsilon)]}{d\varepsilon^{m-1}}$$

wenn nach verrichteten Differenziationen $\varepsilon = 0$ gesetzt wird, stellt also den Rest der Function $f(x)$ für $x = x_1$ dar.

Der Kürze wegen soll die Summe der hinsichtlich aller reellen und imaginären Wurzeln der Gleichung (1) genommenen Reste der Function $f(x)$ der Integralrest dieser Function heissen; dürfen aber nur jene Reste summirt werden, welche sich auf Wurzeln beziehen, in denen die reellen Theile und die Coefficienten von $\sqrt{-1}$ vorgeschriebene Grenzen nicht übersteigen, so wollen wir sagen, der Integralrest sey innerhalb gegebener Grenzen genommen. Die Ableitung der Reste aus einer vorgelegten Function soll die Ausziehung (Extraction) der Reste genannt und durch den als ein neues Zeichen einzuführenden Buchstaben E angezeigt werden; zur Bezeichnung des Integralrestes diene derselbe Buchstabe, während die Function mit doppelten Klammern umgeben ist, wie folgendes Symbol

(12) $$E((f(x)))$$

nachweiset. Die doppelten Klammern sollen auf die Vieldeutigkeit der Werthe der veränderlichen x aufmerksam machen.

Erscheint die Function $f(x)$ unter der gebrochenen Form

(13) $$f(x) = \frac{f(x)}{F(x)}$$

so werden wir, um die Summe ihrer zu den Wurzeln der Gleichung

(14) $$F(x) = 0$$

gehörenden Reste anzudeuten

(15) $$E\frac{f(x)}{((F(x)))}$$

schreiben, indem wir die Doppel-Klammern bloss bei dem Zeichen der Function F(x) anbringen. Die Bezeichnung

(16) $$E\frac{((f(x)))}{F(x)}$$

hingegen soll die Summe der Reste von $f(x)$ in Bezug auf die Wurzeln der Gleichung

(17) $$\frac{1}{f(x)} = 0$$

ausdrücken.

Auf gleiche Weise soll, wenn man

(18) $$F(x) = \varphi(x) \,.\, \chi(x)$$

setzt, die erste der Bezeichnungen

(19) $$E\frac{f(x)}{((\varphi(x)))\chi(x)}, \qquad E\frac{f(x)}{\varphi(x)((\chi(x)))}$$

Die Summe der Reste der erwähnten Function $f(x)$ hinsichtlich der Wurzeln der Gleichung $\varphi(x) = 0$ und die zweite die Summe der Reste hinsichtlich der Gleichung $\chi(x) = 0$ vorstellen, so dass im Allgemeinen die Gleichung

(20) $$E\frac{f(x)}{((\varphi(x) \,.\, \chi(x)))} = E\frac{f(x)}{((\varphi(x))) \,.\, \chi(x)} + E\frac{f(x)}{\varphi(x) \,.\, ((\chi(x)))}$$

besteht. Eben so erhält man, wenn man

(21) $$f(x) = \varphi(x) \,.\, \chi(x)$$

setzt, die Gleichung

(22) $$E\frac{((\varphi(x) \,.\, \chi(x)))}{F(x)} = E\frac{((\varphi(x))) \,.\, \chi(x)}{F(x)} + E\frac{\varphi(x) \,.\, ((\chi(x)))}{F(x)}$$

in welcher von den beiden Gliedern des zweiten Theiles das erste die Summe der Reste von $f(x)$ in Bezug auf die Wurzeln der Gleichung $\frac{1}{\varphi(x)} = 0$, und das zweite die Summe der Reste eben dieser Function in Bezug auf die Wurzeln der Gleichung $\frac{1}{\chi(x)} = 0$ anzeigt. Lässt man insbesondere

$\chi(x) = x - x_1$ seyn, so verwandelt sich das zweite der Symbole (19) in

$$(23) \qquad \mathcal{E} \frac{f(x)}{((x-x_1))\,\varphi(x)}$$

und stellt den partiellen Rest der genannten Function in Bezug auf eine einzelne Wurzel der Gleichung (1) vor. Ferner, da unter dieser Voraussetzung

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)} = (x-x_1) f(x)$$

ist, so sieht man, dass der dem Werthe $x = x_1$ entsprechende Rest auch durch

$$(24) \qquad \mathcal{E} \frac{(x-x_1)\,f(x)}{((x-x_1))}$$

bezeichnet werden kann, was sich auch unmittelbar aus obigen Annahmen ergibt. Endlich wollen wir, um die Summe der Reste von f(x) anzuzeigen, welche sich nur auf diejenigen unter den Wurzeln der Gleichung (1) beziehen, deren reelle Theile innerhalb den Grenzen x_0, X, und deren Coefficienten von $\sqrt{-1}$ innerhalb den Grenzen y_0, Y liegen, das Symbol

$$(25) \qquad {}_{x_0}^{X}\mathcal{E}_{y_0}^{Y} \, ((f(x)))$$

zu Hülfe nehmen. Gehören also der Gleichung (1) bloss imaginäre Wurzeln, so stellt

$$(26) \qquad {}_{-\infty}^{\infty}\mathcal{E}_{0}^{\infty} \, ((f(x)))$$

die Summe jener Reste vor, welche zu den Wurzeln gehören, deren imaginäres Radical $\sqrt{-1}$ mit positiven Coefficienten versehen ist.

Aus diesen Annahmen folgt, wenn x_1 einen be-

sonderen Werth von x anzeigt, für welchen f (x) oder $f^{(m-1)}(x)$ einen endlichen Werth erhält,

(27) $$E \frac{f(x)}{((x-x_1))} = f(x_1)$$

(28) $$E \frac{f(x)}{(((x-x_1)^m))} = \frac{f^{(m-1)}(x_1)}{1.2.3\ldots(m-1)}$$

Gehört der Gleichung (1) die Wurzel x_1 nur einmal, so hat man für $\varepsilon = 0$,

(29) $$E \frac{(x-x_1)f(x)}{((x-x_1))} = \varepsilon f(x_1+\varepsilon)$$

und lässt diese Gleichung die Wurzel x_1 mmal zu, so ist

(30) $$E \frac{(x-x_1)f(x)}{((x-x_1))} = \frac{1}{1.2.3\ldots(m-1)} \cdot \frac{d^{m-1}[\varepsilon^m f(x_1+\varepsilon)]}{d\varepsilon^{m-1}}$$

wenn man nach verrichteter Differentiation $\varepsilon = 0$ nimmt.

Erscheint die Function $f(x)$ unter der gebrochenen Form $\frac{f(x)}{F(x)}$, uud bedeutet x_1 eine Wurzel der Gleichung $F(x) = 0$, so hat man

$$F(x_1+\varepsilon) = \varepsilon F'(x_1+\Theta\varepsilon)$$

wobei der über F angebrachte Accent wie gewöhnlich die Form der abgeleiteten Function, und Θ eine die Einheit nicht erreichende Zahl anzeigt. Es wird also in diesem Falle der Werth des Productes $\varepsilon f(x_1+\varepsilon)$ für $\varepsilon = 0$ durch $\frac{f(x_1)}{F'(x_1)}$ ausgedrückt, und die Formel (29) gibt

(31) $$E \frac{(x-x_1)f(x)}{((x-x_1))} = \frac{f(x_1)}{F'(x_1)}$$

Bedeutet endlich a eine zwischen x_0 und X,

und b eine zwischen y_0 und Y enthaltene Grösse, so ist allgemein

$$(32)\quad \overset{X}{\underset{x_0}{\mathrm{E}}}\,{}^{Y}_{y_0}((f(x))) = \overset{a}{\underset{x_0}{\mathrm{E}}}\,{}^{Y}_{y_0}((f(x))) + \overset{X}{\underset{a}{\mathrm{E}}}\,{}^{Y}_{y_0}((f(x)))$$

und

$$(33)\quad \overset{X}{\underset{x_0}{\mathrm{E}}}\,{}^{Y}_{y^0}((f(x))) = \overset{x}{\underset{x_0}{\mathrm{E}}}\,{}^{b}_{y_0}((f(x))) + \overset{x}{\underset{x_0}{\mathrm{E}}}\,{}^{Y}_{b}((f(x)))$$

Um diese letzteren Formeln jeder denkbaren Beschaffenheit der Grössen a, b, x_0, X, y_0, Y anzupassen, muss man in dem durch das Symbol (25) vorgestellten Integralreste jeden Partialrest, welcher sich auf eine Wurzel bezieht, deren reeller Theil mit einer der Grenzen x_0, X, oder deren Coefficient von $\sqrt{-1}$ mit einer der Grenzen y_0, Y zusammenfällt, auf die Hälfte seines Werthes, und wenn beide Fälle zugleich eintreten, auf den vierten Theil seines Werthes reduciren. Hat die Gleichung (1) reelle und imaginäre Wurzeln, so zeigt das Symbol (26) unter dieser Beschränkung offenbar an, dass zu der halben Summe der den reellen Wurzeln gehörenden Reste die Summe jener Reste hinzukommen soll, welche sich auf imaginäre mit einem positiven Factor von $\sqrt{-1}$ versehene Wurzeln beziehen.

Man setze nun statt $f(x)$ die Summe mehrerer Functionen $\varphi(x)$, $\chi(x)$ etc., so gelangt man ohne Schwierigkeit zu den Formeln

$$(34)\quad \mathrm{E}((\varphi(x)+\chi(x)+\ldots)) = \mathrm{E}((\varphi(x))) + \mathrm{E}((\chi(x))) + \text{etc.}$$

$$(35)\quad \overset{X}{\underset{x_0}{\mathrm{E}}}\,{}^{Y}_{y^0}((\varphi(x)+\chi(x)+\ldots)) = \overset{X}{\underset{x_0}{\mathrm{E}}}\,{}^{Y}_{y_0}((\varphi(x))) + \overset{x}{\underset{x_0}{\mathrm{E}}}\,{}^{Y}_{y_0}((\chi(x))) + \text{etc.}$$

Auch ist

$$(36)\quad E\frac{\varphi(x)+\chi(x)+\ldots}{((F(x)))}=E\frac{\varphi(x)}{((F(x)))}+E\frac{\chi(x)}{((F(x)))}+\text{etc.}$$

u. dgl.

Es sey ferner $f(x, z)$ eine Function der von einander unabhängigen veränderlichen Grössen x, z, und denken wir uns, die Gleichung

$$(37)\qquad \frac{1}{f(x, z)}=0$$

in Bezug auf x aufgelöst, biete Wurzeln dar, welche von z nicht abhängen. Bedeutet x_1 eine dieser Wurzeln, so wird der für $x=x_1$ genommene Rest der abgeleiteten Function $\frac{df(x, z)}{dz}$ von dem in Bezug auf z differenzirten Reste der Function $f(x, z)$ nicht verschieden seyn. Beide Grössen nämlich machen den Coefficienten des Bruches $\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon}$ in den nach den steigenden Potenzen von ε und ε_1 geordneten Entwickelung von $f(x_1+\varepsilon, z+\varepsilon_1)$ aus. Da sich dieselbe Bemerkung auch auf die übrigen von z nicht abhängenden Wurzeln der Gleichung (37) anwenden lässt, so hat man

$$(38)\qquad E\left(\left(\frac{df(x, z)}{dz}\right)\right)=\frac{dE((f(x, z)))}{dz}$$

Es sey nun

$$(39)\qquad f(x, z)=\int_{z_0}^{Z} F(x, z)\,dz$$

wobei die Grössen unterhalb und oberhalb des Integralzeichens den Anfang und das Ende des Integrals bestimmen, und z_0 einen particulären Werth von z anzeigt, so ist

$$(40) \qquad \frac{df(x, z)}{dz} = F(x, z);$$

integrirt man daher die beiden Theile der Gleichung (38), indem man die Integrale für $z = z_0$ verschwinden lässt, so erhält man

$$(41) \int_{z_0}^{z} E((F(x, z)))dz = E\left(\left(\int_{z_0}^{z} F(x, z)\, dz\right)\right)$$

Durch dieselben Betrachtungen gelangt man auch zu den Formeln

$$(42) \qquad \frac{d.\, \overset{X}{\underset{x_0}{}}\overset{Y}{\underset{y_0}{E}}((f(x, z)))}{dz} = \overset{X}{\underset{x_0}{}}\overset{Y}{\underset{y_0}{E}}\left(\left(\frac{df(x, z)}{dz}\right)\right)$$

$$(43) \int \overset{X}{\underset{x_0}{}}\overset{Y}{\underset{y_0}{E}}((F(x, z)))dz = \overset{X}{\underset{x_0}{}}\overset{Y}{\underset{y_0}{E}}((\int F(x, z)\, dz))$$

wobei die Integration in Bezug auf z beiderseits an die nämlichen Grenzen gebunden ist. Aus allen diesen Formeln erhellet, dass es erlaubt ist, unter dem Zeichen E eben so zu differenziren und zu integriren, wie unter dem Zeichen $\int$.

Schreibt man in der Formel (9) $x - x_1$ statt ε, und $\psi(x)$ statt $\frac{f^{(m)}(x_1 + \Theta\varepsilon)}{1.2.3\ldots m}$, so erhält man

$$(44) \qquad f(x) = \frac{f(x)}{(x - x_1)^m}$$

$$= \frac{f(x_1)}{(x-x_1)^m} + \frac{1}{1}\frac{f'(x_1)}{(x-x_1)^{m-1}} + \frac{1}{1.2}\frac{f''(x_1)}{(x-x_1)^{m-2}} + \ldots$$

$$\ldots + \frac{1}{1.2.3\ldots(m-1)}\frac{f^{(m-1)}(x_1)}{x-x_1} + \psi(x).$$

Die in dieser letzteren Formel erscheinende Grösse

$\psi(x)$ nimmt für $x = x_1$ im Allgemeinen einen endlichen Werth, nämlich

$$\frac{f^{(m)}(x_1)}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \ldots m} \quad \text{an.} \tag{45}$$

Aus der Formel (28) folgt ferner, wenn man $m + 1$ statt m, und z statt x setzt:

$$\frac{f^{(m)}(x_1)}{1.2.3\ldots m} = E \frac{f(z)}{(((z - x_1)^{m+1}))} \tag{46}$$

Diess vorausgesetzt hat man

$$\frac{f(x_1)}{(x-x_1)^m} + \frac{1}{1}\frac{f'(x_1)}{(x-x_1)^{m-1}} + \frac{1}{1.2}\frac{f''(x_1)}{(x-x_1)^{m-2}} + \ldots + \frac{1}{1.2.3\ldots(m-1)}\frac{f^{(m-1)}(x_1)}{x-x_1} \tag{47}$$

$$= \frac{1}{(x-x_1)^m} E \frac{f(z)}{((z-x_1))} + \frac{1}{(x-x_1)^{m-1}} E \frac{f(z)}{(((z-x_1)))} + \ldots + \frac{1}{x-x_1} E \frac{f(z)}{(((z-x_1)^m))}$$

$$= E \frac{f(z)}{(x-x_1)^m(((z-x_1)^m))}\Big((z-x_1)^{m-1} + (x-x_1)(z-x_1)^{m-2} + \ldots + (x-x_1)^{m-1}\Big)$$

$$= E \frac{f(z)}{(x-x_1)^m(((z-x_1)^m))} \cdot \frac{(x-x_1)^m - (z-x_1)^m}{x-2}$$

$$= E \frac{f(z)}{(x-z)(((z-x_1)^m))} - \frac{1}{(x-x_1)^m} E \frac{(z-x_1)f(z)}{(x-z)(((z-x_1))}$$

Das Symbol

$$E \frac{(z-x_1)^m f(z)}{(x-z)(((z-x_1)^m))} = E \frac{(z-x_1^m) f(z)}{(x-z)((z-x_1))}$$

stellt übrigens den Rest der Function

$$(48)\qquad \frac{f(z)}{x-z}$$

in Bezug auf $z = x_1$ vor; und da dieser Rest offenbar verschwindet, weil die Function (48) für $z = x_1$ einen endlichen Werth, nämlich $\frac{f(x)}{x-x_1}$ annimmt: so sind wir berechtiget zu schliessen, dass allgemein

$$(49)\qquad \frac{f(x_1)}{(x-x_1)^m} + \frac{1}{1}\frac{f'(x_1)}{(x-x_1)^{m-1}} + \frac{1}{1.2}\frac{f''(x_1)}{(x-x_1)^{m-2}}$$
$$+ \ldots + \frac{1}{1.2.3\ldots(m-1)}\frac{f^{(m-1)}(x_1)}{x-x_1}$$
$$= \mathcal{E}\frac{f(z)}{(x-z)(((z-x_1)^m))} \text{ ist.}$$

Man kann die Richtigkeit der Gleichung (49) durch die Bemerkung bestätigen, dass der zweite Theil derselben den Werth des Ausdruckes

$$(50)\qquad \frac{1}{1.2.3\ldots(m-1)}\,\frac{d^{m-1}\left(\frac{f(z)}{x-z}\right)}{dz}$$

für $z = x_1$ angibt.

Da andererseits $f(z) = (z-x_1)^m \mathit{f}(z)$ ist, so geht der zweite Theil der Gleichung (49) in

$$\mathcal{E}\frac{(z-x_1)^m \mathit{f}(z)}{(x-z)(((z-x_1)^m))} = \mathcal{E}\frac{(z-x_1)\mathit{f}(z)}{(x-z)((z-x_1))}$$

über, und die Gleichung (44) gibt

$$(51)\qquad \mathit{f}(x) - \mathcal{E}\frac{(z-x_1)\mathit{f}(z)}{(x-z)((z-x_1))} = \psi(x)$$

Aus dieser letzteren Gleichung erhellet, dass es, um aus einer Function $\mathit{f}(x)$, welche für $x = x_1$ unendlich wird, eine andere Function zu bilden, der unter derselben Voraussetzung ein endlicher Werth

zukommt, hinreicht, von $f(x)$ eine Summe rationaler Brüche, nämlich

(52) $$\mathrm{E}\,\frac{(z-x_{\mathrm{I}})f(z)}{(x-z)((z-x_{\mathrm{I}}))}$$

oder den in Bezug auf $z = x_{\mathrm{I}}$ genommenen Rest der Function

(53) $$\frac{f(z)}{x-z}$$

zu subtrahiren.

Nehmen wir nun an, man wolle aus $f(x)$ eine andere Function ableiten, welche für keinen der partikulären Werthe $x = x_{\mathrm{I}}$, $x = x_2$, etc. in den Zustand des unendlichen Wachsens übergeht, so hat man offenbar von $f(x)$ bloss die Summe der in Bezug auf $z = x_{\mathrm{I}}$, $z = x_2$, etc. genommenen Reste der Function (53), d. h. den durch das Symbol

(54) $$\mathrm{E}\,\frac{((f(z)))}{x-z}$$

vorgestellten Integralrest abzuziehen.

Setzt man also

(55) $$f(x) - \mathrm{E}\,\frac{((f(z)))}{x-z} = \omega(x)$$

so besitzt die Function $\omega(x)$ die Eigenschaft, für $x = x_{\mathrm{I}}$, $x = x_2$ etc., und folglich für alle reellen und imaginären Werthe der Veränderlichen x einen endlichen Werth anzunehmen.

In dem besonderen Falle, wenn $f(x)$ ein rationaler Bruch ist, kann $\omega(x)$ auch nur ein solcher seyn, dessen Namen aber niemals verschwindet, d. h. $\omega(x)$ ist ein rationaler Bruch, welcher eine constante Grösse, oder mit anderen Worten eine ganze Function von x zum Nenner hat. Diess vorausgesetzt, sey

$$(56) \qquad f(x) = \frac{f(x)}{F(x)}$$

wobei f(x) und (F(x) zwei ganze Functionen bedeuten. Uebertrifft der Grad der zweiten jenen der ersten, so verschwindet die Function $f(x)$ für unendliche Werthe von x, und desshalb reducirt sich in der Gleichung (55) $\omega(x)$ auf Null. Man hat also unter diesen Umständen

$$(57) \qquad f(x) = E\,\frac{((f(z)))}{x-z}$$

Die Formel (57) kann in allen denkbaren Fällen zur Zerlegung der gebrochenen rationalen Function $f(x)$ in ihre einfachen Partialbrüche gebraucht werden.

Es sey z. B. der Bruch $\frac{1}{(x-1)^2(x+1)}$ in Partialbrüche zu zerlegen. Die Formel (57) gibt

$$\frac{1}{(x-1)^2(x+1)} = E\,\frac{1}{(x-z)(((z+1)(z-1)^2))}$$
$$= E\,\frac{1}{(x-z)(z-1)^2((z+1))}$$
$$+ E\,\frac{1}{(x-z)(z+1)(((z-1)^2))}$$

Ferner ist, wenn ε eine unendlich klein werdende Grösse vorstellt, den Formeln (27) und (30) zu Folge

$$E\,\frac{1}{(x-z)(z-1)^2((z+1))} = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{x+1}$$

und
$$E\,\frac{1}{(x-z)(z+1)(((z-1)^2))} = \frac{d\,\frac{1}{(2+\varepsilon)(x-1-\varepsilon)}}{d\varepsilon}$$
$$= -\frac{1}{(2+\varepsilon)^2}\cdot\frac{1}{x-1-\varepsilon} + \frac{1}{2+\varepsilon}\cdot\frac{1}{(x-1-\varepsilon)^2}$$

$$= -\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{x-1} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{(x-1)^2}$$

Man findet demnach

$$(59)\quad \frac{1}{(x+1)(x-1)^2} = \frac{1}{4(x+1)} - \frac{1}{4(x-1)} + \frac{1}{2(x-1)^2}$$

Setzt man in (57) $\frac{f(x)}{F(x)}$ statt $f(x)$, und nimmt man, insofern m eine beliebige ganze Zahl bezeichnet

$$(60)\qquad F(x) = (x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_m)$$

an, so ergibt sich

$$(61)\qquad \frac{f(x)}{(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_m)}$$

$$= E\frac{f(z)}{(((z-x_1)z-x_2)\ldots(z-x_m)))}\cdot\frac{1}{x-z}$$

$$= E\frac{f(z)}{((z-x_1))(z-x_2)\ldots(z-x_m)}\cdot\frac{1}{x-z} + \text{etc.}$$

$$\ldots + E\frac{f(z)}{(z-x_1)(z-x_2)\ldots((z-x_m))}\cdot\frac{1}{x-z}$$

$$= \frac{f(x_1}{(x_1-x_2)\ldots(x_1-x_m)}\cdot\frac{1}{x-x_1} + \text{etc.}$$

$$\ldots + \frac{f(x_m)}{(x_m-x_1)\ldots(x_m-x_{m-1})}\cdot\frac{1}{x-x_m}$$

folglich

$$(62)\quad f(x) = \frac{(x-x_2)\ldots(x-x_m)}{(x_1-x_2)\ldots(x_1-x_m)}f(x_1) + \ldots$$

$$\ldots + \frac{(x-x_1)\ldots(x-x_{m-1})}{(x_m-x_1)\ldots(x_m-x_{m-1})}f(x_m)$$

Diese letzte Gleichung stellt die Interpolationsformel von L a g r a n g e dar.

Legt man, nach verrichteter Multiplication beider Theile der Gleichung (57) der Veränderlichen x einen

unendlich grossen Werth bei, und bezeichnet man den dieser Annahme entsprechenden Werth des Productes $x f(x)$ durch $\mathfrak{F}$, so erhält man die zwei Formeln

$$x f(x) = \mathrm{E} \frac{((f(x)))}{1 - \frac{z}{x}}$$

und (63) $$\mathfrak{F} = \mathrm{E}\,((f(z))) = 0$$

Verschwindet die Grösse $\mathfrak{F}$, so hat man geradezu

(64) . $$\mathrm{E}\,((f z)) = 0$$

Diese Formel besteht immer, wenn der Unterschied zwischen dem Grade des Nenners und jenem des Zählers im rationalen Bruche $f(x)$ die Einheit übersteigt. Sie stimmt mit einer im *Journal de l'École polytechnique* 18. cahier pag. 500 aufgestellten Gleichung überein. Setzt man $\frac{f(z)}{z - x}$ statt $f(x)$, so besteht sie auch in dem Falle, wenn die erwähnte Differenz der Einheit gleich wird. Man hat also dann

(65) $$\mathrm{E}\left(\left(\frac{f(z)}{z - x}\right)\right) = f(x) - \mathrm{E}\frac{((f(z)))}{x - z} = 0$$

was schon die Gleichung (57) lehrte.

Setzt man in den Formeln (63) und (64)

$$f(x) = \frac{x^n}{(x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x)_m}$$

so ergibt sich der bereits aus anderen Gründen bekannte Satz, dass die Summe

(66) $$\frac{x_1^n}{(x_1 - x_2)\ldots(x_1 - x_m)} + \frac{x_2^n}{(x_2 - x_1)\ldots(x_2 - x_m)} + \ldots + \frac{x_m^n}{(x_m - x_1)\ldots(x_m - x_{m-1})}$$

gleich Null wird, sobald $n < m - 1$ ist, und $= 1$, sobald $n = m - 1$ ist.

Die unter der Voraussetzung, dass $f(x)$ einen rationalen Bruch ausdrückt, erhaltenen Gleichungen (57), (63) und (64) bestehen noch in vielen anderen Fällen, wie in der Folge, wo wir es mit den vorzüglichsten Anwendungen des Calculs der Reste zu thun haben werden, gezeigt werden soll.

III. Ueber die Anwendung des im vorhergehenden Aufsatze vorgetragenen neuen Calculs auf die Summirung einiger Reihen.

(Exercices de Mathématiques par M. A. L. Cauchy, p. 46 etc.)

Es seyen $f(x, z)$, $F(x, z)$ zwei gegebene Functionen der Veränderlichen x, z, und n eine beliebige ganze Zahl. Man denke sich das Product

$$[f(x, z) + f(z, x)]^n \, F(x, z)$$

nach dem binomischen Lehrsatze entwickelt, und jedes Glied des erhaltenen Ausdruckes n Mal differenzirt, nämlich das erste Glied n Male in Bezug auf x; das zweite $(n-1)$ Mal in Bezug auf x, und ein Mal in Bezug auf z; das dritte $(n-2)$ Mal in Bezug auf x, und zwei Mal in Bezug auf z u. s. w.; endlich das letzte Glied n Mal in Bezug auf z. Setzt man der Kürze halber

(1) $f(x, z) = u$, $f(z, x) = v$, $F(x, z) = w$

so erhält man durch dieses Verfahren die Reihe

$$(2)\ \frac{d^n(u^n w)}{dx^n},\ \frac{n}{1}\cdot\frac{d^n(u^{n-1}vw)}{dx^{n-1}dz},\ \frac{n(n-1)}{1.2}\cdot\frac{d^n(u^{n-2}v^2w)}{dx^{n-2}dz^2}\ \text{etc.}$$

$$\ldots\ \frac{d^n(v^n w)}{dz^n}$$

deren Summe unbekannt ist. Der Calcul der Reste bietet ein Mittel an die Hand, diese Summe in dem Falle leicht zu bestimmen, wenn man nach dem Differenziren $z = x$ nimmt, wie wir sogleich zeigen werden.

Es sey s ein gemeinschaftlicher Werth der Veränderlichen x, z, und S der ihm correspondirende Werth der Summe der Glieder, welche die Reihe (2) bilden, so dass

$$(3)\quad S = \frac{d^n(u^n w)}{dx^n} + \frac{n}{1}\cdot\frac{d^n(u^{n-1}vw)}{dx^{n-1}dz} + \frac{n(n-1)}{1.2}\cdot\frac{d^n(u^{n-2}v^2w)}{dx^{n-2}dz^2} + \ldots + \frac{d^n(v^n w)}{dz^n}$$

ist, wenn man nach verrichteten Differenziationen $z = x = s$ nimmt. Die Formel (28) in I. führt uns auf die Gleichung

$$\frac{1}{1.2.3\ldots m.1.2.3\ldots(n-m)}\ \frac{d^n(u^m v^{n-m} w)}{dx^m dz^{n-m}} = \mathcal{E}\mathcal{E}\,\frac{u^m v^{n-m} w}{(((x-s)^{m+1}))\,(((z-s)^{n-m+1}))}$$

in welcher sich eines der Zeichen $\mathcal{E}$ auf die Veränderliche x und das andere auf z bezieht, und desshalb kann folgende Gleichung

$$(4) \quad S = 1.2.3\ldots n \left\{ EE \frac{u^n w}{(((x-s)^{n+1}))\,((z-s))} \right.$$

$$+ EE \frac{u^{n-1} vw}{(((x-s)^n))\,(((z-s)^2))} + \ldots\ldots$$

$$\left. \ldots + EE \frac{v^n w}{((x-s))\,(((z-s)^{n+1}))} \right\}$$

an die Stelle der Formel (3) treten. Anderer Seits ist der bekannten Summirungsformel einer geometrischen Progression zufolge,

$$\frac{u^n}{(x-s)^{n+1}(z-s)} + \frac{u^{n-1}v}{(x-s)^n(z-s)^2} + \ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots + \frac{v^n}{(x-s)\,(z-s)^{n+1}}$$

$$= \frac{1}{(x-s)^{n+1}(z-s)^{n+1}} \cdot \frac{u^{n+1}(z-s)^{n+1} - v^{n+1}(x-s)^{n+1}}{u(z-s)-v(x-s)}$$

Daher gibt die Gleichung (4)

$$(5)\; S = 1.2.3\ldots n EE \frac{wu^{n+1}(z-s)^{n+1} - wv^{n+1}(x-s)^{n+1}}{[u(z-s)-v(x-s)]\,(((x-s)^{n+1}))\,(((z-s)^{n+1}))}$$

Es sey ferner

$$(6) \ldots \frac{d f(x, z)}{dx} = \varphi(x, z), \quad \frac{d f(x, z)}{dz} = \chi(x, z).$$

Betrachtet man in dem Ausdrucke

$$\frac{wu^{n+1}}{u(z-s) - v(x-s)} = \frac{[f(x, z)]^{n+1} F(x, z)}{(z-s)\, f(x, z) - (x-s)\, f(z, x)}$$

z allein als veränderlich, so stellt dieser Ausdruck eine für z = x unendlich gross werdende Function

dar, deren auf den genannten Werth von z sich beziehender Rest

$$(8) \qquad \frac{[f(x, x)]^{n+1} F(x, x)}{f(x, x) - (x - s)\,[\varphi(x, x) - \chi(x, x)]}$$

ist. Theilt man diesen Rest durch z — x, zieht man den erhaltenen Quotienten von dem Ausdrucke (7) ab, und nennt man die sich dabei ergebende Differenz $\omega(x, z)$, d. h. setzt man

$$(9) \quad \frac{wu^{n+1}}{u(z-s) - v(x-s)} = \frac{[f(x, x)]^{n+1} F(x, x)}{f(x, x) - (u-s)[\varphi(x, x) - \chi(x, x)]} \cdot \frac{1}{z-x} + \omega(x, z)$$

so nimmt die Function $\omega(x, z)$ den in I. aufgestellten Sätzen zu Folge unter der Voraussetzung $z = x$ für jeden Werth von x, also auch für $z = x = s$ einen endlichen Werth an. Auf demselben Wege gelangt man auch zu der Gleichung

$$(10) \quad \frac{wv^{n+1}}{u(z-s) - v(x-s)} = \frac{[f(x, x)]^{n+1} F(x, x)}{f(x, x) - (x-s)[\varphi(x, x) - \chi(x, x)]} \cdot \frac{1}{z-x} + \psi(x, z)$$

wobei $\psi(x, z)$ gleichfalls eine Function anzeigt, welche für $z = x = s$ einen endlichen Werth erhält. Mit Hülfe der Gleichungen (9) und (10) bekömmt die Formel (5) folgende Gestalt:

$$(11)\qquad S = 1.2.3\ldots n\,\mathrm{EE}\,\frac{[f(x,x)]^{n+1}F(x,x)}{f(x,x)-(x-s)[\varphi(x,x)-\chi(x,x)]}\cdot\frac{1}{z-x}\cdot\frac{(z-s)^{n+1}-(x-s)^{n+1}}{(((x-s)^{n+1}))(((z-s)^{n+1}))}$$

$$+\,1.2.3\ldots n\,\mathrm{EE}\,\omega(x,z)\cdot\frac{(z-s)^{n+1}}{(((x-s)^{n+1}))(((z-s)^{n+1}))}$$

$$-\,1.2.3\ldots n\,\mathrm{EE}\,\psi(x,z)\cdot\frac{(x-s)^{n+1}}{(((x-s)^{n+1}))(((z-s)^{n+1}))}$$

Anderseits hat man offenbar

$$(12)\qquad \mathrm{E}\,\omega(x,z)\,\frac{(z-s)^{n+1}}{(((z-s)^{n+1}))}=0,\quad \mathrm{E}\,\psi(x,z)\,\frac{(x-s)^{n+1}}{(((x-s)^{n+1}))}=0$$

$$(13)\qquad \mathrm{E}\,\frac{(z-s)^{n+1}-(x-s)^{n+1}}{z-x}\cdot\frac{1}{(((z-s)^{n+1}))}=1$$

Daher gibt die Formel (11)

$$(14)\qquad S = 1.2.3\ldots n\,\mathrm{E}\,\frac{[f(x,x)]^{n+1}F(x,x)}{f(x,x)-(x-s)\,[\varphi(x,x)-\chi(x,x)]\,(((x-s)^{n+1}))}$$

oder was dasselbe ist

$$(15)\quad S = \frac{d^n \cdot \dfrac{[f(x,x)]^{n+1} F x, x)}{f(x,x) - (x-s)\,[\varphi(x,x) - \chi(x,x)]}}{dx^n}$$

vorausgesetzt, dass man nach dem Differenziren $x = s$ nimmt. Schreibt man in der Formel (15) z statt s, und das zweite Glied der Gleichung (3) statt S, so hat man die Formel

$$(16)\ \frac{d^n(u^n w)}{dx^n} + \frac{n}{1} \cdot \frac{d^n(u^{n-1} v w)}{dx^{n-1} dz} + \ldots + \frac{n}{1} \frac{d^n(u v^{n-1} w)}{dx\, dz^{n-1}} + \frac{d^n(v^n w)}{dz^n}$$

$$= \frac{d^n \cdot \dfrac{[f(x,x)]^{n+1} F (x, x}{f(x,x) - (x-z)\,[\varphi(x,x) - \chi(x,x)]}}{dx^n}$$

deren Richtigkeit jedoch fordert, dass man nach verrichtetem Differenziren $z = x$ setze.

Um eine Anwendung der Formel (16) zu zeigen, seyen

$$U, V, P, Q$$

vier Functionen der veränderlichen Grösse x, welche sich, wenn man z statt x setzt, in

$$\mathfrak{U}, \mathfrak{V}, \mathfrak{P}, \mathfrak{Q}$$

verwandeln. Lässt man nun

$$(17)\qquad u = U\mathfrak{V},\ v = V\mathfrak{U},\ w = P\mathfrak{Q}$$

seyn, und stellt man nach dem Differenziren den Buchstaben z an den Platz von x, so reducirt sich der erste Theil der Formel (16) zunächst auf das Polynom

$$\mathfrak{V}^n\mathfrak{Q}\,\frac{d^n(U^nP)}{dx^n}+\frac{n}{1}\,\frac{d(\mathfrak{U}\mathfrak{V}^{n-1}\mathfrak{Q})}{dz}\,\frac{d^{n-1}(U^{n-1}VP)}{dx^{n-1}}+\dots$$

$$\dots+\frac{n}{1}\,\frac{d(UV^{n-1}P)}{dx}\cdot\frac{d^{n-1}(\mathfrak{U}^{n-1}\mathfrak{V}\mathfrak{Q})}{dx^{n-1}}+V^nP\,\frac{d^n(\mathfrak{U}^n\mathfrak{Q})}{dz^n}$$

welches die zwei Veränderlichen x und z enthält; sodann auf das Polynom

$$V^nQ\,.\frac{d^n(U^nP)}{dx^n}+\frac{n}{1}\cdot\frac{d(UV^{n-1}Q)}{dx}\cdot\frac{d^{n-1}(U^{n-1}VP)}{dx^{n-1}}+$$

$$\dots+\frac{n}{1}\,\frac{d(UV^{n-1}P)}{dx}\cdot\frac{d^{n-1}(U^{n-1}VQ)}{dx^{n-1}}+V^nP\frac{d^n(U^nQ)}{dx^n}$$

worin bloss x erscheint. Ferner hat man

$$\varphi(x,\ z)=\frac{du}{dx}=\mathfrak{V}\frac{dU}{dx},\ \chi(x,\ z)=\frac{du}{dz}=\mathfrak{U}\frac{dV}{dz}$$

folglich $\varphi\,(x,\ x)\ =\ V\frac{dU}{dx},\ \chi(x,\ x)=U\,\frac{dV}{dx}$

wodurch der zweite Theil der Formel (16) offenbar in

$$\frac{1}{dx^n}\cdot d^n\cdot\frac{u^nv^nPQ}{1-(x-z)\left(\frac{1}{U}\frac{dU}{dx}-\frac{1}{V}\frac{dV}{dx}\right)}$$

übergeht. Daher gibt die Formel (16)

$$(18)\quad V^nQ\,\frac{d^n(U^nP)}{dx^n}+\frac{n}{1}\,\frac{d(UV^{n-1}Q)}{dx}\cdot\frac{d(U^{n-1}VP)}{dx^{n-1}}$$

$$+\frac{n(n-1)}{1\,.\,2}\,\frac{d^2(U^2V^{n-2}Q)}{dx^2}\cdot\frac{d^{n-2}(U^{n-2}V^2P)}{dx^{n-2}}$$

$$+\dots+\frac{n}{1}\,\frac{d(UV^{n-1}P)}{dx}\,\frac{d^{n-1}(U^{n-1}VQ)}{dx^{n-1}}+V^nP\,\frac{d^n(U^nQ)}{dx^n}$$

$$=\frac{1}{dx^n}d\cdot\frac{U^nV^nPQ}{1-(x-z)\left(\frac{1}{U}\frac{dU}{dx}-\frac{1}{V}\frac{dV}{dx}\right)}$$

Diese letztere Gleichung besteht, wie immer die durch P, Q, U, V vorgestellten Functionen beschaffen seyn mögen, wenn nur in dem zweiten Theile derselben nach dem Differenziren $z = x$ gesetzt wird.

Lässt man in (18) $U = 1$, $V = 1$ seyn, so zeigt sich die bekannte Gleichung

$$(19)\quad Q d^n P + \frac{n}{1} dQ \,.\, d^{n-1} P + \frac{n(n-1)}{1 \,.\, 2} d^2 Q \,.\, d^{n-2} P$$

$$\ldots\ldots + \frac{n}{1} dP \,.\, d^{n-1} Q + P d^n Q = d^n (PQ).$$

Nimmt man aber in (18)

$$U = W^\alpha,\quad V = W^\beta,\quad P = W^\gamma,\quad Q = W^\delta$$

indem W eine Function von x bedeutet, und α, β, γ, δ was immer für Zahlen sind; setzt man ferner der Kürze wegen

$$\alpha - \beta = a,\quad n\alpha + \gamma = r,\quad n\alpha + \delta = s$$

so ergibt sich

$$(20)\quad W^{s-na} \frac{d^n (W^r)}{dx^n} + \frac{n}{1} \,.\, \frac{d(W^{s-(n-1)a})}{dx} \,.\, \frac{d^{n-1}(W^{r-a})}{dx^{n-1}}$$

$$\ldots + \frac{n}{1} \frac{d(W^{r-(n-1)a})}{dx} \frac{d^{n-1}(W^{s-a})}{dx} + W^{r-na} \frac{d^n (W^s)}{dx^n}$$

$$= \frac{1}{dx^n} d^n \,.\, \frac{W^{r+s-na}}{1 - a(x-z) \dfrac{1}{W} \dfrac{dW}{dx}}$$

Man kommt zu dieser Formel auch, wenn man in (18) $U = 1$, $V = W^{-a}$, $P = W^r$, $Q = W^s$ schreibt.

Es werde nun in (20) $W = e^x$ gesetzt. Theilt man beide Theile dieser Gleichung durch $e^{(r+s-na)x}$, so findet man

$$r^n + \frac{n}{1}(r-a)^{n-1}[s-(n-1)a]$$

$$+ \frac{n(n-1)}{1.2}(r-2a)^{n-2}[s-(n-2)a]^2 + \ldots\ldots$$

$$\ldots + \frac{n}{1}(s-a)^{n-1}[r-(n-1)a] + s^n$$

$$= e^{(r+s-na)x} \cdot \frac{d^n([1-a)(x-z)]^{-1} e^{(r+s-na)x})}{dx^n}$$

wodurch man mit Berücksichtigung der Gleichung (19), nachdem man nach dem Differenziren $z = x$ gesetzt hat, auf die Formel

$$(21)\ r^n + \frac{n}{1}(r-a)^{n-1}[s-(n-1)a]$$

$$+ \frac{n(n-1)}{1.2}(r-2a)^{n-2}[s-(n-2)a]^2 + \ldots\ldots\ldots$$

$$\ldots + \frac{n}{1}(s-a)^{n-1}[r-(n-1)a] + s^n$$

$$= (r+s-na)^n + na(r+s-na)^{n-1}$$

$$+ n(n-1)a^2(r+s-na)^{n-2} + \ldots 1.2.3\ldots n.a^n$$

kommt. Es sey in dieser letztern $r = ax$, $s = ay$, so verwandelt sie sich in

$$(22)\ x^n + \frac{n}{1}(x-1)^{n-1}(y-n+1)$$

$$+ \frac{n(n-1)}{1.2}(x-2)^{n-2}(y-n+2)^2 + \ldots$$

$$\ldots\ldots + \frac{n}{1}(x-1)^{n-1}(y-n+1) + y^n$$

$$= (x+y-n)^n + n(x+y-n)^{n-1}$$

$$+ n(n-1)(x+y-n)^{n-2} + \ldots + 1.2.3\ldots n.$$

Die Gleichung (22) verdient beachtet zu werden. Nimmt man in derselben $x + y = n$, so gibt sie dio bekannte Formel

$$(23)\ x^n - \frac{n}{1}(x-1)^n + \frac{n(n-1)}{1.2}(x-2)^n - \ldots .$$
$$\pm (x-n)^n = 1.2.3\ldots n.$$

Setzt man aber $x + y = n + 1$, so findet man

$$(24)\ x^n - \frac{n}{1}(x-1)^{n-1}(x-2)^{n-2}$$
$$+ \frac{n(n-1)}{1.2}(x-2)^{n-2}(x-3)^2 - \ldots \pm (x-n-1)^n$$
$$= 1 + n + n(n-1) + n(n-1)(n-2) + \ldots + 1.2.3\ldots n.$$

Es sey ferner in (20) $W = x$, so hat man, wenn man beiderseits durch $x^{r+s-n(a+1)}$ theilt,

$$r(r-1)\ldots(r-n+1) + \frac{n}{1}(r-a)(r-a-1)\ldots$$
$$\ldots(r-a-n+2)[s-(n-1)a] + \text{etc.}$$
$$+ \frac{n}{1}(s-a)(s-a-1)\ldots(s-a-n+z)[r-(n-1)a]$$
$$+ s(s-1)\ldots(s-n+1)$$
$$= x^{-r-s+n(a+1)} \frac{d^n([az-(a-1)x]^{-1}x^{r+s-n(a+1)})}{dx^n}$$

daher, wenn man auf (19) Rücksicht nimmt, und nach dem Differenziren $z = x$ setzt:

$$(25)\ r(r-1)\ldots(r-n+1) + \frac{n}{1}(r-a)(r-a-1)\ldots$$
$$\ldots(r-a-n+2)[s-(n-1)a] + \ldots\ldots$$
$$\ldots + \frac{n}{1}(s-a)(s-a-1)\ldots(s-a-n+2)[r-(n-1)a]$$
$$+ s(s-1)\ldots(s-n+1)$$
$$= (r+s-na+1)(r+s-na)\ldots(r+s-na-n+2)$$
$$+ n(a-1)(r+s-na+1)\ldots\ldots(r+s-na-n+3)$$
$$+ n(n-1)(a-1)^2(r+s-na+1)\ldots(r+s-na-n+4)$$
$$+ \ldots + 1.2.3\ldots n(a-1)^n.$$

Die Voraussetzung $a=1$, $r-n+1=x$, $s-n+1=y$ führt auf die bekannte Formel

$$(26)\ x(x+1)\ldots(x+n-1)+\frac{n}{1}x(x+1)\ldots$$
$$\ldots(x+n-2)+\frac{n(n-1)}{1.2}x(x+1)\ldots(x+n-3)y(y+1)$$
$$+\ldots+\frac{n}{1}xy(y+1)\ldots(y+n-2)+y(y+1)\ldots(y+n-1)$$
$$=(x+y)(x+y-1)\ldots(x+y-n+1);$$

die Annahme

$$r=x,\ a=h+1,\ s+r=na-1$$

hingegen gibt

$$(27)\ x(x-1)\ldots(x-n+1)-\frac{n}{1}(x-h)(x-h-1)\ldots(x-h-n+1)$$
$$+\frac{n(n-1)}{1.2}(x-2h)(x-2h-1)\ldots(x-2h-n+1)-\ldots$$
$$\ldots\ldots\pm(x-nh)(x-nh-1)\ldots(x-nh-n-1)$$
$$=1.2.3\ldots n.h^n$$

eine Formel, welche auch leicht durch den Differenzen-Calcul begründet wird und von der Gleichung

$$(28)\ \Delta^n.(x-nh)(x-nh-1)\ldots(x-nh-n+1)=1.2.3\ldots n.\Delta x^n$$

unter der Voraussetzung $\Delta x=h$, nicht verschieden ist.

Kehren wir zur Gleichung (18) zurück, und schreiben wir in derselben $\frac{P}{V^n}$ statt P, $\frac{Q}{V^n}$ statt Q, VW statt U, so haben wir

$$(29)\ Q\frac{d^n(W^nP)}{dx^n}+\frac{n}{1}\frac{d(WQ)}{dx}.\frac{d^{n-1}(W^{n-1}P)}{dx^{n-1}}$$
$$+\frac{n(n-1)}{1.2}\frac{d^2(W^2Q)}{dx^2}.\frac{d^{n-2}(W^{n-2}P)}{dx^{n-2}}$$
$$+\ldots+\frac{n}{1}\frac{d(WP)}{dx}.\frac{d^{n-1}(W^{n-1}Q)}{dx^{n-1}}+\frac{Pd^n(W^nQ)}{dx^n}$$

$$= \frac{1}{dx^n} \cdot d^n \frac{PQW^n}{1 - (x - z)\frac{dW}{Wdx}}$$

Nehmen wir, in so fern s eine beliebige Grösse und R eine Function der Veränderlichen x bezeichnet,

$$P = R\left(1 - (x - s)\frac{dW}{Wdx}\right)$$

an. Nichts hindert uns nach dem Differenziren $s = x$ zu setzen, oder, was dasselbe ist, vor dem Differenziren $s = z$. Die Gleichung (29) gibt uns hiebei

$$(31) \qquad \frac{d^n(QRW^n)}{dx^n} =$$

$$Q\frac{d^n(W^nR)}{dx^n} + \frac{n}{1}\frac{d(WQ)}{dx}\cdot\frac{d^{n-1}(W^{n-1}R)}{dx^{n-1}} + \ldots$$

$$\ldots\ldots + \frac{n}{1}\frac{d(WR)}{dx}\frac{d^{n-1}(W^{n-1}Q)}{dx^{n-1}} + R\cdot\frac{d^n(W^nQ)}{dx^n}$$

$$- Q\frac{d^n\left((x-z)W^{n-1}R\frac{dW}{dx}\right)}{dx^n} - \frac{n}{1}\frac{d(WQ)}{dx}$$

$$\cdot\frac{d^{n-1}\left((x-z)W^{n-2}R\frac{dW}{dx}\right)}{dx^{n-1}}$$

$$- \ldots - \frac{n}{1}\frac{d^{n-1}(W^{n-1}Q)}{dx^{n-1}}\cdot\frac{d\left((x-z)R\frac{dW}{dx}\right)}{dx}$$

wenn nach dem Differenziren x an die Stelle von z tritt. Unter dieser Bedingniss aber ist allgemein vermöge der Formel (19)

$$\frac{d^m((x-z)f(x))}{dx^m} = m\frac{d^{m-1}f(x)}{dx^{m-1}}$$

und folglich

$$\frac{d^m(W^mR)}{dx^m} - \frac{d^m\left((x-z)W^{m-1}R\frac{dW}{dx}\right)}{dx^m}$$

$$= \frac{d^m(W^mR)}{dx^m} - m\frac{d^{m-1}\left(W^{m-1}R\frac{dW}{dx}\right)}{dx^{m-1}}$$

$$= \frac{d^{m-1}(W^mR')}{dx^{m-1}}$$

wobei R′ den Differenzialquotienten $\frac{dR}{dx}$ anzeigt. Es kann demnach die Gleichung (31) auf

$$(32)\quad \frac{d^n(QRW^n)}{dx^n} = Q\frac{d^{n-1}(W^nR')}{dx^{n-1}}$$

$$+ \frac{n}{1}\frac{d(WQ)}{dx}\cdot\frac{d^{n-2}(W^{n-1}R')}{dx^{n-2}} + \ldots\ldots\ldots$$

$$\ldots + \frac{n}{1}WR'\frac{d^{n-1}(W^{n-1}Q)}{dx^{n-1}} + R\frac{d^n(W^nQ)}{dx^n}$$

zusammengezogen werden. Vertauscht man hier Q und R gegen einander, so hat man auch

$$(33)\quad \frac{d^n(QRW^n)}{dx^n} = Q\frac{d^n(W^nR)}{dx^n} + \frac{n}{1}WQ'\frac{d^{n-1}(W^{n-1}R)}{dx^{n-1}} + \ldots$$

$$\ldots + \frac{n}{1}\frac{d(WR)}{dx}\cdot\frac{d^{n-2}(W^{n-1}Q')}{dx^{n-2}} + R\frac{d^{n-1}(W^nQ')}{dx^{n-1}}$$

Setzt man endlich in (32) QW′ statt Q, und n − 1 statt n, so ergibt sich

$$(34)\quad \frac{d^{n-1}(QRW^{n-1}W')}{dx^{n-1}} = QW'\frac{d^{n-2}(W^{n-1}R')}{dx^{n-2}} + \dots$$

$$\dots + \frac{n-1}{1}WR'\frac{d^{n-2}(W^{n-2}QW')}{dx^{n-2}} + R\frac{d^{n-1}(W^{n-1}QW')}{dx^{n-1}}$$

und wenn man (34) mit n multiplicirt, und von (32) abzieht

$$(35)\quad \frac{d^{n-1}\left(W^n\frac{d(QR)}{dx}\right)}{dx^{n-1}} = Q\frac{d^{n-1}(W^nR')}{dx^{n-1}}$$

$$+ \frac{n}{1}WQ'\frac{d^{n-2}(W^{n-1}R')}{dx^{n-2}} + \dots + \frac{n}{1}WR'\frac{d^{n-2}(W^{n-1}Q')}{dx^{n-2}}$$

$$+ R\frac{d^{n-1}(W^nQ')}{dx^{n-1}}$$

Man kann diese Formeln leicht dadurch prüfen, dass man der ganzen Zahl n besondere Werthe, z. B. 1, 2, 3, ... beilegt.

Setzt man in (34) und (35)

$$Q = e^{rx},\ R = e^{sx},\ W = e^x$$

so erhält man

$$(36)\quad \frac{(r+s+n)^n - (r+n)^n}{s} = (s+n)^{n-1}$$

$$+ \frac{n}{1}(r+1)(s+n-1)^{n-2} + \frac{n(n-1)}{1.2}(r+2)^2(s+n-2)^{n-3}$$

$$\dots + \frac{n}{1}(r+n-1)^{n-1}$$

und

$$(37)\quad \frac{(r+s)(r+s+n)^{n-1} - (r+n)^{n-1} - s(s+n)^{n-1}}{rs}$$

$$= \frac{n}{1}(s+n-1)^{n-2} + \frac{n(n-1)}{1.2}(r+2)(s+n-2)^{n-3}$$

$$+ \ldots + \frac{n}{1}(r+n-1)^{n-2}.$$

Die Gleichung (37) gibt für $s = r$

$$(38) \qquad 2\frac{(2r+n)^{n-1} - (r+n)^{n-1}}{r}$$

$$= \frac{n}{1}(r+n-1)^{n-2} + \frac{n(n-1)}{1.2}(r+2)(r+n-2)^{n-3}$$

$$+ \ldots + \frac{n(n-1)}{1.2}(r+n-2)^{n-3}(r+2) + \frac{n}{1}(r+n-1)^{n-2}$$

und wenn hier $r = 0$ ist

$$(39) \qquad 2(n-1)n^{n-2} = \frac{n}{1}(n-1)^{n-2}$$

$$+ \frac{n(n-1)}{1.2}2^1(n-2)^{n-3} + \ldots + \frac{n(n-1)}{1.2}.(n-2)^{n-3}2^1$$

$$+ \frac{n}{1}(n-1)^{n-2}$$

Setzt man in (35)

$$Q = x^r, \; R = x^s, \; W = x^a$$

so findet man

$$(40) \qquad \left.\begin{array}{l} (r+s)(r+s+an-n+1)\ldots\ldots(r+s+an-1) \\ -\, r(r+an-n+1)\ldots\ldots\ldots\ldots(r+an-1) \\ -\, s(s+an+1)\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(s+an-1) \end{array}\right\} : rs$$

$$= \frac{n}{1}[s+(n-1)a-1]\ldots\ldots[s+(n-1)a-n+2]$$

$$+ \frac{n(n-1)}{1.2}[s+(n-2)a-1]\ldots\ldots[s+(n-2)a-n+3]$$

$$(r+2a-1)$$

$$+ \text{etc.} + \frac{n}{1}[r+(n-1)a-1]\ldots\ldots[r+(n-1)a-n+2]$$

Wird in (40) $a=1$, $r=x$, $s=y$, so entsteht die Formel (26).

IV. Ueber den Gebrauch der Methode der unbestimmten Coefficienten bei der Entwickelung der Potenzen des Cosinus eines Bogens nach den Cosinussen seiner Vielfachen.

Die Methode der unbestimmten Coefficienten besteht bekanntlich darin, dass man eine zu entwickelnde Function einer unendlichen Reihe gleich setzt, in welcher ein gewisses Bildungsgesetz herrscht, und deren einzelne Glieder mit unbestimmten Coefficienten versehen sind, auf deren nähere Bestimmung es allein noch ankommt. Man substituirt zu diesem Ende die angenommene Reihe statt der Function, welche sie vorstellen soll, in einer nach den Eigenschaften dieser Function entworfenen Differenzial- oder auch endlichen Gleichung, betrachtet die sich hiedurch ergebende Gleichung als eine identische, und erlaubt sich desshalb die Coefficienten gleichartiger Glieder diesseits und jenseits des Gleichheitszeichens einander gleich zu setzen. Auf diese Art gelangt man zu einer unendlichen Menge von Gleichungen, mit deren Hülfe die Werthe der noch unbekannten Coefficienten ausgemittelt werden. Meistens erhält man aus denselben ohne Mühe eine allgemeine Recursionsformel zwischen den zu berechnenden Coefficienten, welche die Werthe jedes späteren durch die Werthe einiger

früheren ausdrückt, so zwar dass, sobald man den Werth des ersten Coefficienten aus der Beschaffenheit der zur Entwickelung vorgelegten Function erkannt hat, die Bestimmung der folgenden keiner Schwierigkeit unterliegt. Lassen sich die Coefficienten wirklich finden, so sieht man die Gleichung zwischen der Function und der Reihe als unwidersprechlich bewiesen an; ergeben sich aber bei der Bestimmung der Coefficienten Ungereimtheiten, so zieht man daraus den Schluss, dass die angenommene Form der Reihe auf die gegebene Function nicht passt.

Im Geiste dieser Methode setzt Lagrange (*Leçons sur le calcul des fonctions. Leçon 11ème*)

$$y = (\cos x)^m = A\cos nx + B\cos(n-1)x + C\cos(n-2)x + D\cos(n-3)x + \text{etc.}$$

wobei A, B, C, D etc. unbestimmte von x independente Coefficienten anzeigen, und substituirt diese Reihe für y in die aus $y = (\cos x)^m$ leicht folgende Gleichung

$$my\sin x + \frac{dy}{dx}\cos x = 0$$

Nach vollbrachter Umstaltung der in dem erhaltenen Resultate vorkommenden Producte der Sinusse und Cosinusse in Summen von Sinussen, und Zusammenziehung aller homogenen Glieder, kommt er auf eine der Nulle gleiche, nach den Grössen $\sin(n+1)x$, $\sin nx$, $\sin(n-1)x$, $\sin(n-2)x$ etc. fortschreitende Reihe, die er als identisch verschwindend betrachtet, und aus welcher er die Gleichungen

$$(m-n)A=0, (m-n+1)B=0, (m-n+2)C-(m+n)A=0$$
$$(m-n+3)D-(m+n-1)B=0, \text{ u. s. w.}$$

folgert. Die erste derselben gibt $n = m$; aus den

übrigen findet man $B = 0$, $C = \frac{2m}{2} A$, $D = \frac{2m-1}{3} B$,

$$E = \frac{2m-2}{4} C, \text{ etc.}$$

also $B = 0$, $D = 0$, $E = 0$, etc.

und $C = mA$, $E = \frac{m(m-1)}{2}$, $G = \frac{m(m-1)(m-2)}{2 \cdot 3} A$ etc.

Dem zu Folge hält sich Lagrange für berechtiget

$$(1) \quad (\cos x)^m = A\left(\cos mx + m\cos(m-2)x + \frac{m(m-1)}{2}\cos(m-4)x + \ldots\right)$$

zu setzen, wobei noch A zu bestimmen übrig ist.

Die Annahme $x = 0$ verhilft ihm hierzu; er findet

$$1 = A\left(1 + m + \frac{m(m-1)}{2} + \text{etc.}\right) = A(1+1)^m$$

also $A = \frac{1}{2^m}$ und daher

$$(\cos x)^m = \frac{1}{2^m}\left(\cos mx + m\cos(m-2)x + \frac{m(m-1)}{2}\cos(m-4)x + \ldots\right)$$

welche Formel er für jeden Werth von m gelten lässt.

Dass dieses Resultat keinesweges die erforderliche Allgemeinheit besitzt, haben wir bereits im ersten Hefte angeführt, auch sind die Schwierigkeiten, welche man in dem Gebrauche der Differenzial-Rechnung bei dieser Entwickelung zu finden glaubte, aus den, im 3ten Bande der zweiten Ausgabe von Lacroix grösserem Werke über Differenzial- und

Integralrechnung befindlichen, Zusätzen zu dem ersten Bande desselben hinreichend bekannt.

Auf eine sinnreiche Art hat sich Poinsot geholfen (*Recherches sur l'analyse des sections angulaires. Paris* 1825. *pag.* 60 etc.). Er erklärt die Unvollständigkeit des Resultates für eine Folge der unvollständigen Bestimmung der Constante A.

Wenn man nämlich in der allgemeinen Gleichung (1) $x = o$ seyn lässt, so folgt daraus nicht bloss $1 = A\,(1+1)^m$, oder $A = \frac{1}{2^m}$, sondern vielmehr $(1)^m = A \cos m o \,.\, (1+1)^m$, wobei der Factor $\cos m o$, wenn m keine ganze Zahl bedeutet, nicht nur den Werth 1, sondern auch noch die Werthe $\cos 2m\pi$, $\cos 4m\pi$, $\cos 6m\pi$ u. s. w. besitzt, und daher muss $A = \frac{(1)^m}{2^m \cos m o}$ gesetzt werden, in welchem Bruche der Nenner $\cos m o$ im Allgemeinen eine vieldeutige Grösse ist. Die hier angeführten verschiedenen Werthe von $\cos m o$ correspondiren den verschiedenen Werthen von $\cos m x$, $\cos (m-2)x$ etc.

Nimmt man ferner zur Bestimmung von A, statt $x = o$ zu setzen, $x = \pi$ an, so erhält man $A = \frac{(-1)^m}{2^m \cos m\pi}$. Poinsot drückt desshalb den Werth von A folgender Massen aus:

$$A = \frac{(\pm 1)^m}{2^m \cos(m.\text{Arc.}\cos \pm 1)}$$

und bezieht das obere Zeichen auf den Fall, wenn $\cos x$ positiv, und das untere auf jenen, wenn $\cos x$

negativ ist. Nach ihm ist also

$$(2) \quad (2\cos x)^m = \frac{(\pm 1)^m}{\cos(m\,\text{Arc.}\cos \pm 1)} \Big(\cos mx + m\cos(m-2)x + \frac{m(m-1)}{2}\cos(m-4)x + \text{etc.}\Big)$$

die richtige auf jeden Werth von m und x anwendbare Formel. Bei dem Gebrauche derselben ist zu bemerken, dass zu dem kleinsten Werthe von Arc. cos ± 1 die Peripherie 2π so oft hinzugesetzt werden muss, als sie in x enthalten ist, wie aus der Bestimmung von A erhellet.

Die Gleichung (2) umfasst die im ersten Hefte Seite 106 erhaltenen Gleichungen (8) und (9) als besondere Fälle.

Allein so scharfsinnig auch Poinsot's Deduction der an sich betrachtet völlig untadelhaften Formel (2) seyn mag, so steht sie, wie Poisson (*Bulletin des sciences mathématiques. Tom IV.* 1825. *pag.* 147 *et* 345) bemerkt, nicht auf sicherem Grunde. Es gewährt nämlich die Methode der unbestimmten Coefficienten bei der Entwickelung der Functionen in Reihen, welche nach periodischen Grössen, wie die Kreisfunctionen sind, fortschreiten, nicht die Sicherheit, mit welcher sie bei der Transformation der Functionen in Reihen angewendet werden kann, die nach den Potenzen einer Veränderlichen geordnet erscheinen, und diese Bemerkung enthält den Schlüssel zur Aufklärung aller Schwierigkeiten, welche sich bei dem besprochenen Gegenstande vorfinden mögen. Zwei Reihen der ersteren Gattung welche eine und dieselbe Function für einen und denselben Umfang der ver-

änderlichen Grösse ausdrücken, sind nicht nothwendig identisch, man kann daher die Coefficienten der gleichartigen Glieder auf beiden Seiten des Gleichheitszeichens nicht allgemein gleich setzen.

Ferner gibt es bekanntlich viele dieser Reihen, deren Summen in Bezug auf einen gewissen Umfang der Werthe der veränderlichen Grösse verschwinden; man kann solche Reihen zu anderen addiren, ohne die Bedeutung der letzteren zu verändern, woraus die Ungewissheit und Unrichtigkeit der Resultate, welche das Princip der Methode der unbestimmten Coefficienten, auf Reihen mit periodischen Grössen angewandt, darbietet, von selbst erhellet.

V. Ueber ein Kennzeichen der Anwesenheit imaginärer Wurzeln in einer gegebenen Gleichung.

(Annales de Mathématiques pures et appliquées par M. Gergonne. Tome 16. 1825 — 1826. p. 382)

Lehrsatz. Einer geordneten Gleichung mit einer Unbekannten gehören wenigstens so viele Paare imaginärer Wurzeln, als sich in derselben Gruppen von vier unmittelbar aufeinander folgenden Coefficienten p, q, r, s ausfindig machen lassen, für welche das Product $(q^2 - pr)(r^2 - qs)$ gleich Null oder negativ ausfällt.

Beweis. Eine geordnete Gleichung lässt bekanntlich nicht mehr reelle positive Wurzeln zu, als Zeichenabwechslungen, und nicht mehr negative

Wurzeln, als Zeichenfolgen in derselben erscheinen. Besitzt daher die Gleichung keine imaginäre Wurzeln, so ist die Anzahl der reellen positiven Wurzeln genau so gross, als die Anzahl der Zeichenabwechslungen, und die Anzahl der negativen Wurzeln genau so gross, als die Anzahl der Zeichenfolgen.

Hieraus folgt, dass eine Gleichung, in der ein Glied zwischen zwei mit gleichen Zeichen versehenen Gliedern fehlt, wenigstens ein Paar imaginäre Wurzeln fordert. Denn das fehlende Glied kann sowohl mit dem Coefficienten $+ 0$, als auch mit $- 0$ versehen, in die Gleichung zurückgestellt werden. Wegen der Gleichheit der Zeichen seiner Nachbarglieder bringt eine dieser Voraussetzungen zwei Zeichenfolgen, die andere aber zwei Zeichenabwechslungen hervor. Hätte also die Gleichung keine imaginären Wurzeln, so würden nach obiger Regel das eine Mal um zwei positive Wurzeln mehr angezeigt, als das andere Mal, was ungereimt ist. Da wir hier stillschweigend annehmen, die Coefficienten der gegebenen Gleichung seyen reelle Grössen, so sind die imaginären Wurzeln stets paarweise vorhanden, und somit ist die gemachte Folgerung richtig.

Derselbe Schluss zeigt, dass man, so oft sich in einer Gleichung eine Lücke zwischen gleichen Zeichen befindet, berechtiget ist, dieser Gleichung ein neues Paar imaginärer Wurzeln zuzuschreiben. So oft also in einer Gleichung zwei unmittelbar an einander grenzende Glieder fehlen, so oft entsprechen derselben wenigstens zwei imaginäre Wurzeln, denn eines der fehlenden Glieder kann immer so in die

Gleichung zurückgesetzt werden, dass das andere zwischen zwei mit gleichen Zeichen versehenen Gliedern mangelt.

Da die Einführung einer reellen Wurzel in eine Gleichung auf die Anzahl der bereits vorhandenen imaginären Wurzeln keinen Einfluss ausübt, so sey

$$px^{n+1} + qx^{n} + rx^{n-1} + sx^{n-2}$$

eine aus dem ersten Theile einer geordneten Gleichung mit der unbekannnten Grösse x herausgehobene Gruppe unmittelbar aufeinander folgender Glieder, und es werde die Gleichung selbst mit $x + A$ multiplicirt, wobei A eine reelle Grösse anzeigt, wodurch eine neue, mit denselben imaginären Wurzeln versehene Gleichung entsteht, in welcher die drei Nachbarglieder

$$(q+pA)x^{n+1} + (r+qA)x^{n} + (s+rA)x^{n-1}$$

erscheinen.

Man lasse nun $A = -\frac{r}{q}$ seyn, damit der Coefficient $r+qA$ verschwinde, so hat die Gleichung ein Paar imaginäre Wurzeln, wenn zugleich $q+pA$ und $s+rA$ einerlei Zeichen annehmen, oder was dasselbe ist, wenn das Product

$$(q + pA)(s + rA)$$

positiv wird. Es ist aber mit Hülfe des für A gewählten Werthes

$$(q+pA)(r+sA) = \frac{1}{q^2}(q^2-pr)(qs-r^2)$$

daher gehören der vorgelegten Gleichung wenig-

stens zwei imaginäre Wurzeln, wenn das Product

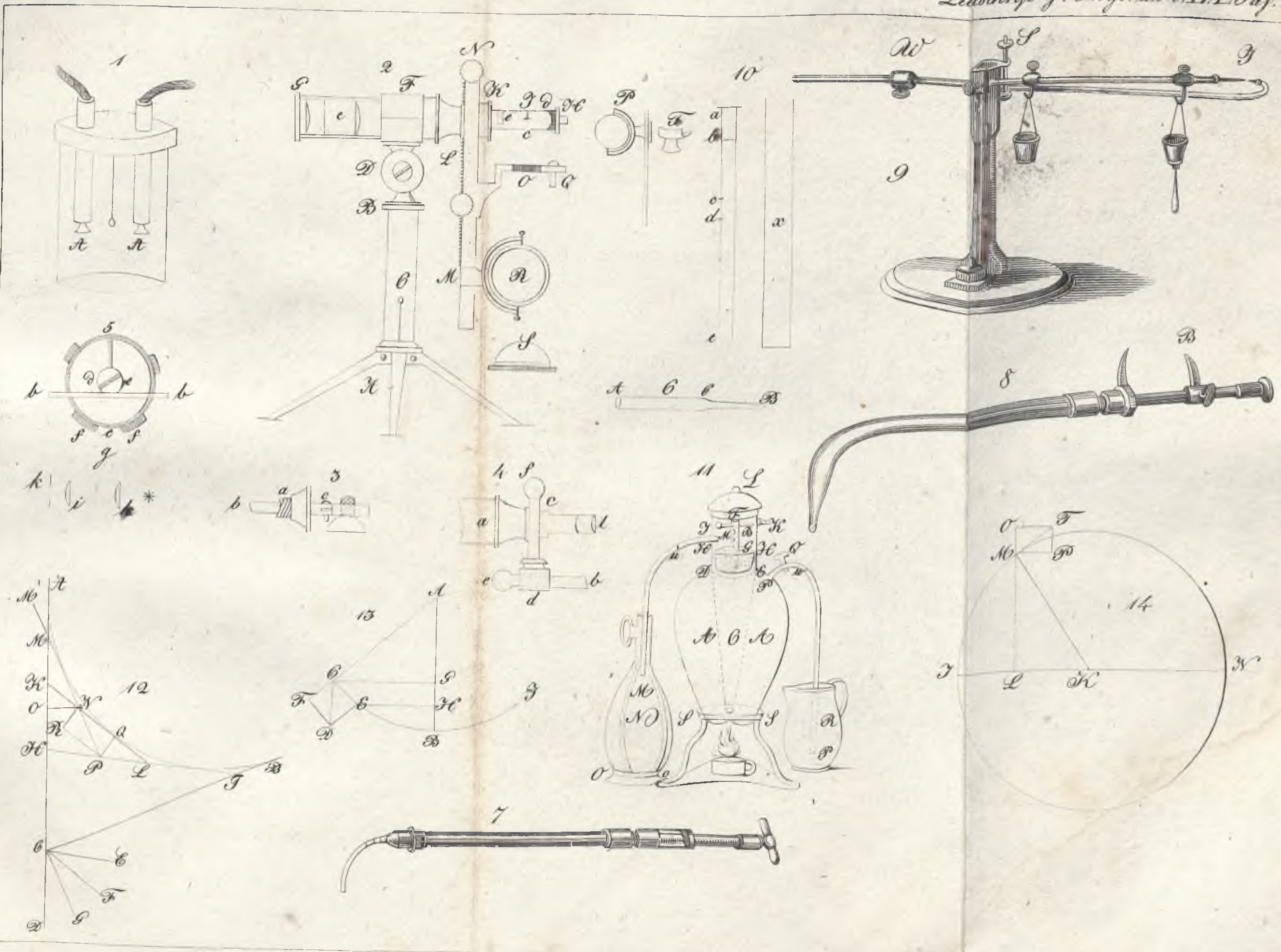
$$(q^2 - pr)\ (r^2 - qs)$$

einen negativen Werth erhält.

Würde einer der Factoren dieses Productes $= 0$, so wäre diess ein Zeichen, dass in obiger transformirten Gleichung ausser $r + qA$ noch einer der Coefficienten $q + pA$, $s + rA$ verschwindet, wobei dieselbe Folgerung Statt findet.

Berichtigung.

Seite 342 Z. 13 statt $\frac{\pi al}{\pi \sqrt{gl}}$ soll es heissen: $\frac{\pi al}{a\sqrt{gl}}$.



M. Aigner sc.